REALISTIESE WISKUNDE ONDERRIG EN DIE STRATEGIEË WAT STANDERD SES LEERDERS VIR DIE OPLOSSING VAN GELYKTYDIGE LINEêRE VERGELYKINGS ONTWIKKEL

KALVIN WHITTLES

'N MINI-TESIS INGELEWER TER GEDEELTELIKE VERVULLING VAN DIE VEREISTES VIR DIE GRAAD M ED. AAN DIE DEPARTEMENT DIDAKTIEK VAN DIE UNIVERSITEIT VAN WES-KAAPLAND

STUDIELEIER:
PROF C M JULIE

BELLVILLE
SEPTEMBER 1996

VERKLARING

Ek verklaar hiermee dat **REALISTIESE WISKUNDE ONDERRIG EN DIE STRATEGIEë WAT STANDERD SES LEERDERS VIR DIE OPLOSSING VAN GELYKTYDIGE LINEêRE VERGELYKINGS ONTWIKKEL** my eie werk is, dat dit nie voorheen vir enige graad of eksamen aan enige ander universiteit voorgelê is nie, en dat al die bronne wat ek gebruik of aangehaal het, deur volledige verwysing aangedui of erken is.

GETEKEN: .... DATUM: September 1996

KALVIN WHITTLES

DANKBETUIGINGS

Hierdie studie word opgedra aan my vader en moeder, Moses Daniel (3 Junie 1917-2 Oktober 1975) en Dora (5 Julie 1929-28 Junie 1993), vir hul visie, opoffering en ondersteuning deur die moeilike jare, en ook aan my vrou en kinders, Elvira, Nicólyn en Alvin, wat ek tydens die studie so afgeskeep het.

Hierdie studie sou egter nie moontlik gewees het sonder die bydrae van verskillende persone nie. My opregte dank aan:

- My studieleier, Cyril Julie, vir sy leiding en ondersteuning vir die duur van die studie.
- My kollega, Abdurahouf Cassiem - verbonde aan Weltevrede Sekondêr - vir sy insette en rol as waarnemer.
- Die twee standerd ses (graad 8) klasse aan Weltevrede Sekondêr sonder wie die studie nie moontlik sou gewees het nie.
- My Hemelse Vader vir gesondheid, deursettingsvermoë en Genade.

ABSTRAK

Die oplos van vergelykings beklee 'n belangrike plek in onderrig van Algebra. Die verbintenis van dié onderwerp met ander onderwerpe in Algebra wys op die belangrikheid van die rol. Meer en meer is daar 'n wekroep dat die onderwerpe wat in Wiskunde onderrig word, probleme bevat wat die werklikheid van die leerders aanspreek. Realistiese Wiskunde Onderrig as benadering bied die ruimte aan die onderwerp om materiaal van dié aard te ontwerp. Hierdeur kom die leerder in aanraking met kontekste wat vanuit sy/haar werklikheid tot hom/haar spreek.

In die studie word gekyk met watter oplossingsstrategieë leerders in standerd ses (graad 8) na vore kom vir die oplos van twee gelyktydige lineêre vergelykings. Die studie wat as 'n ontwikkelingsondersoek geskied, het as vertrekpunt Realistiese Wiskunde Onderrig as teoretiese raamwerk. Binne dié raamwerk vorm die ontwikkeling van materiaal en die implementering daarvan in klaskamereksperimente belangrike komponente. Ten opsigte van die ontwikkeling van materiaal vir leeraktiwiteite het die volgende uit die studie na vore getree:

- Kontekste wat deur die inhoud van die materiaal aangespreek word.
- Tyd benodig vir die ontwikkeling van materiaal.

- Noue samewerking tussen navorser en praktykpersone in implementering van die materiaal.
- Die rol van tersiêre instellings.

Ontwikkelingsondersoek blyk vele moontlikhede in te hou vir navorsingsinisiatiewe wat tot kurrikulumverandering kan lei. Verder betrek ontwikkelingsondersoek al die nodige rolspelers en selfs die leerders se insette deurdat oplossings van hul probleme gebruik kan word in verdere ontwikkeling van materiaal en om aanbevelings ten opsigte van verdere ontwikkeling van materiaal te maak.

Die oplossings wat leerders vir die studie ontwikkel het, getuig van die vrye produksies waarmee leerders vorendag kan kom. Hul verskillende skryfwyses vir oplossings getuig van inisiatief en uit hoofde van die inhoudelike aard van die materiaal kon hulle van hul alreeds-verworwe kennis gebruik om verskillende oplossingsstrategieë te ontwikkel.

Met die nuwe Wiskunde-kurrikulum wat vir die nabye toekoms in die vooruitgesig gestel word, word die bydrae van die studie as volg saamgevat:

- Materiaal moet daarop gemik wees om die ervaringsveld van die leerders aan te spreek.
- Ontwerpte materiaal moet tot die beskikking van praktykpersone (Wiskunde-vakonderwysers) gestel word vir implementering in die klaskamer en reflektering daaroor.

- Implementering moet alle rolspelers insluit, naamlik navorsers, praktykpersone, akademici en leerders.
- Insette van leerders moenie te gering geskat word nie.
- Leerders moet geleentheid kry tot ontwikkeling van hul eie oplossingsstrategieë.

ABSTRACT

The solution of equations has an important place in the teaching of Algebra. This topic's relationship with other topics in Algebra confirms this importance. More and more we have a call for topics in Mathematics teaching to have problems that potray the realistic world of the learner. Realistic Mathematics Education provides the space for the development of realistically inclined materials. Hereby the learner is presented with contexts that come from his/her reality.

The main aim of this study is to see what solution strategies standard six (grade 8) learners can produce for the solution of two simultaneous linear equations. This study that proceeds as a developmental study, takes place in a Realistic Mathematics Education theoretical framework. Within this framework two important issues are at stake, namely the development of materials and the implementation thereof in classroom experiments. With respect to the development of materials for learning activities, the following have to be considered:

- The context that is addressed by the content of the material.
- Time needed for development of material.
- Close cooperation between researcher and teacher in implementing the material.

- The role of tertiary institutions in the whole process.

The developmental study presents many possibilities for research initiatives with curriculum development in mind. The development study makes room for all role players and even the input of learners in the form of solutions to problems could be used for further development of material.

In this study learners developed solutions that are proof of the free productions learners can come up with. The different representations of their solutions show initiative and that they could become involved with the content of the material on the basis of their previously-attained knowledge in developing these solution strategies.

With a new curriculum to be implemented in the near future, the following is seen as this study's contribution to this process:

- Development of materials within the experiences of the learner.
- Implementation of materials should include all role players, namely researchers, teachers, academics and learners.
- Input of learners should not be disregarded.
- Developed material is to be put to use of teachers for implementation.
- Learners should be given the opportunity to develop their own solution strategies.

INHOUDSOPGAWE

VERKLARING	i
DANKBETUIGINGS	ii
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	vi
INHOUDSOPGAWE	viii
Hoofstuk 1: PROBLEEMSTELLING	1
1.1 Inleiding	1
1.2 Verskuiwing	3
1.2.1 Benadering	3
1.2.2 Inhoud	4
1.2.3 Aanbieding	5
1.3 Teoretiese Raamwerk	5
1.4 Studieveld	6
Hoofstuk 2: HISTORIESE OORSIG	8
2.1 Siening van Algebra	8
2.1.1 Klassieke Algebra	9
2.1.2 Studie van patrone en strukture	10
2.1.3 Aksiomatiese siening	10
2.1.4 Konkrete benadering	11
2.2 Vergelykings	11
2.2.1 Egiptiese werkswyse	12
2.2.2 Babiloniërs	13
2.2.2.1 Gelyktydige vergelykings	14
2.3 Ander oplossingsmetodes	15
2.3.1 Metode 1: Substitusie	15
2.3.2 Metode 2: Eliminasie	16

2.3.3 Metode 3: Lineêre kombinasies van vergelykings 17

2.3.4 Metode 4: Grafiese oplossing 17

2.4 Huidige opset 18

Hoofstuk 3: REALISTIESE WISKUNDE ONDERRIG AS TEORETIESE RAAMWERK 21

3.1 Inleiding 21

3.2 Rol van Hans Freudenthal 22

3.3 Realistiese Wiskunde Onderrig 25

3.3.1 Matematisering 26

3.3.2 Herontdekking 30

3.3.3 Didaktiese fenomenologie 32

3.4 Vyf onderrigbeginsels 33

3.4.1 Konstruksies moet deur die konkrete gestimuleer word 33

3.4.2 Ontwikkeling van hulpmiddels 33

3.4.3 Stimulering van produksie en refleksie 34

3.4.4 Leer deur interaksie 34

3.4.5 Verwewing van inhoude 35

3.5 Teoretiese raamwerk 35

Hoofstuk 4: NAVORSINGSMETODOLOGIE 37

4.1 Inleiding 37

4.2 Ontwikkelingsondersoek 37

4.3 Dataversameling 40

Hoofstuk 5: IMPLEMENTERING: EERSTE FASE 42

5.1 Inleiding 42

5.2 Ontwerp van werkblaaie 42

5.3 Plek van implementering: Weltevrede Sekondêr 43

5.4 Aanbieding 44

5.5 Beskrywing en analise van implementeringsgebeure 45
5.5.1 Werkblad (bylae B) 46
5.5.2 Probleem 1 47
5.5.3 Probleme 2 en 3 49
5.5.4 Probleem 4 50
5.5.4.1 Skatting en subsitusie 51
5.5.4.2 Gebruik van veranderlikes 52
5.5.4.3 Terugwerking 53
5.5.4.4 Gebruik van spiraal 54
5.6 Refleksie oor eerste fase 55
Hoofstuk 6: IMPLEMENTERING: TWEEDE FASE 58
6.1 Wysigings en toevoegings 58
6.2 Implementering 62
6.3 Probleem 1 63
6.4 Probleme 2 en 3 65
6.5 Probleme 4, 5 en 6 65
6.5.1 Skatting en substitusie 66
6.5.2 Gebruik van veranderlikes 66
6.5.3 Terugwerking 67
6.5.4 Eliminasie 70
6.6 Probleem 7 71
Hoofstuk 7: SLOT 76
7.1 Materiaal 77
7.2 Ontwikkelingsondersoek 79
7.3 Oplossingsstrategieë 80
7.4 Kurrikulumverandering 80
7.5 Derde fase 81
7.5.1 Werblad 1 82

7.5.2 Werkblad 2 82

7.5.3 Werkblad 3 83

7.5.4 Werkblad 4 83

7.6 Slotopmerking 83

BIBLIOGRAFIE 84

INHOUDSOPGAWE: BYLAE 89

HOOFSTUK 1: PROBLEEMSTELLING

The need for reconstruction and development.

1.1 INLEIDING

Na afloop van die eerste nie-rassige demokratiese verkiesing op 27-29 Maart 1994 in Suid-Afrika is 'n Regering van Nasionale Eenheid (RNE) saamgestel. Hierdie regering het hom/haar ten doel gestel om transformasie en ontwikkeling op die verskillende vlakke van die samelewing voorop te stel. Van die vlakke in die samelewing wat hiervoor geprioritiseer is, is die gebiede op ekonomiese, sosiale, politiese, morele, kulturele en omgewingsvlakke (African National Congress, 1994:2).

Die era voor 1994 is gekenmerk deur 'n apartheidsbeleid wat verskillende sektore van die samelewing en die meerderheid van die land se inwoners nie onaangeraak gelaat het nie. As gevolg hiervan het daar agterstande ontstaan. Transformasie en ontwikkeling is daarop gemik om agterstande wat oor die jare heen daargestel is, uit te wis.

In dié opsig is dit belangrik dat die proses van transformasie en ontwikkeling ook deursyfer na die onderwys. Die onderwysbeleid voor 1994 was daarop gemik om in die behoeftes van die minderheid te voorsien, terwyl die meerderheid van die inwoners benadeel en met 'n agterstand gelaat is. Sedert 1948 was die beleid van apartheid van die destydse Nasionale Party daarop gemik om die agterstand te vestig. Pells (1938), 'n opvoedkundige, het dit duidelik gestel dat die swartmense (meerderheid) se opvoeding daarop gemik was om hulle voor te berei om as arbeiders van die witmense (minderheid) te dien. Die hele skoolstelsel was dus daarop geskoei om dié apartheidsbeleid te vestig. Vakinhoude en die onderrigbenadering wat deur onderwysers gevolg is het bygedra om agterstande te vergroot en te vestig. Die oproep tot transformasie en ontwikkeling is dus 'n poging om die agterstande aan te spreek.

Hierdie wekroep tot transformasie en ontwikkeling kan ook in Wiskunde beslag kry. Waar Wiskunde tot en met standerd 7 (graad 9) verpligtend is vir alle leerders, kan onderrig in die vak vir die Junior Sekondêre Kursus (standerds 5-7) benut word om basiese wiskundige voorbereiding vir verdere studie en beroepe te voorsien (Wes-Kaaponderwysdepartement, 1996:4). Waar die vorige kurrikulum in Wiskunde vir die Junior Sekondêre Kursus net verwys het na algemene doelstellings oor die onderrig- en leersituasie (Onderwysbulletin, JS 13/84), spreek die konsepsillabus van die Wes-Kaaponderwysdepartement die vraagstuk van transformasie en ontwikkeling aan in die samelewingsdoelstellings wat as volg verwoord is:

- *om 'n positiewe bydrae te maak tot die heropbou en ontwikkeling van die Suid-Afrikaanse samelewing en die bemagtiging van sy mense;*

- *om gelyke geleenthede en keusemoontlikhede te ontwikkel;*
- *om 'n bydrae te maak tot die breedste ontwikkeling van die samelewing se kulture;*
- *om 'n demokratiese, nie-rassige en nie-seksistiese onderrigpraktyk te bevorder; en*
- *om 'n bewuswording van, en 'n verantwoordelikheid vir die bewaring van 'n totale omgewing te skep.*

(Wes-Kaaponderwysdepartement, 1996:3)

1.2 VERSKUIWING

Om gehoor te gee aan die oproep tot transformasie en ontwikkeling vir die onderrig van Wiskunde, is ek van mening dat daar 'n verskuiwing ten opsigte van die aard en vorm van die onderrig van Wiskunde moet plaasvind. In die verskuiwing wat na die totale leersituasie verwys, het ek drie fasette geïdentifiseer. Die fasette behels 'n verandering in:

- benadering;
- inhoud; en
- aanbieding.

1.2.1 Benadering

Alvorens daar na 'n veranderde benadering gekyk word, word daar eers na die tradisionele benadering verwys. Die tradisionele benadering sien as volg daaruit:

- die onderwyser betree die klaskamer as die aleeneienaar van kennisinhoude;

- lesaanbieding is lineêr van aard sonder daadwerklike insette van die leerders; en
- die klem val op retensie van leerinhoude sonder die nodige begrip daarvan.

Die veranderde benadering het ten doel om die klem te laat val op:

- vaardighede;
- probleemoplossende denker;
- proses;
- koöperatiewe leer; en
- leergebeure wat binne die konteks van die ervaringsveld van die leerder plaasvind.

1.2.2 Inhoud

Vir die verandering in benadering om tot sy reg te kom, word daar besin oor die inhoudelike van dit wat aangebied word. Waar daar in die verlede 'n pleidooi was dat die konteks van wiskunde-probleme nie die werklikheid van die leerder weerspieël nie, is dit belangrik dat dié situasie gerekonstrueer word om die tendens reg te stel.

In die konsepsillabus vir Wiskunde vir die Junior Sekondêre Kursus van die Wes-Kaaponderwysdepartement (1996) word dit gestel dat die sillabus dit ten doel het om die onderrig sodanig binne die konteks te plaas dat dit by die ervaringsveld van die leerder aanpas. Uit hoofde hiervan sal daar gekyk word na die inhoudelike van dit wat aangebied word om sodoende die verandering in benadering tot sy reg te laat kom. Waar moontlik moet probleme die kontekste van die leerder aanspreek wat vanuit sy ervaringveld geformuleer is.

1.2.3 Aanbieding

Die verandering in die benadering plaas die rol van die onderwyser in die leersituasie onder die soeklig. Hy/sy betree nie nou die klaskamer as die alleenbesitter van kennis nie, maar aanvaar dat die leerders oor sekere kennisinhoude beskik. As fasiliteerder probeer die onderwyser om leerders te lei om tot probleemoplossing te kom. Die aanbieding van die onderwyser is daarop gemik om leerders in staat te stel om 'n situasie in die werklikheid wat wiskundig voorgestel kan word, te herken, 'n toepaslike wiskundige model daarvoor te formuleer, die wiskundige oplossing daarvoor te kry, en die resultaat terug te interpreteer in terme van die werklike situasie (Wes-Kaaponderwysdepartement, 1996:4).

1.3 TEORETIESE RAAMWERK

Wanneer 'n onderwyser onderrig gee, doen hy/sy dit vanuit 'n sekere perspektief. Hierdie perspektief bepaal die benadering ten opsigte van hom/haar aanbieding. In aansluiting tot die pleidooi vir die transformasie en ontwikkeling van die totale leersituasie, kan daar deur 'n nuwe perspektief, gehoor gegee word aan die oproep. Hierdeur kan daar gepoog word om beslag te gee aan die geïdentifiseerde fasette in die leersituasie wat 'n verandering in benadering, inhoud en aanbieding voorstel. In wese word daar gekyk na 'n onderrigbenadering wat probeer om genoemde fasette aan te spreek.

Realistiese Wiskunde Onderrig word as moontlike teoretiese raamwerk ondersoek waarbinne die studie gaan geskied. Onderrig en ander aktiwiteite sal poog om vanuit die perspektief te geskied en sal probeer bly by die beginsels soos neergelê deur die Realistiese Wiskunde Onderrigbenadering. Verder sal daar gekyk word na die ruimte wat die perspektief bied waarbinne die veranderinge in die leersitiuasie gerealiseer kan word. Realistiese Wiskunde Onderrig as teoretiese raamwerk word in hoofstuk 3 behandel.

1.4 STUDIEVELD

Vir die doel van hierdie studie word daar binne die teoretiese raamwerk besin oor die oplos van twee gelyktydige lineêre vergelykings in 'n standerd 6 klas (graad 8). Tans word algebra hoofsaaklik as 'n stel reëls en algoritmes wat slaafs nagevolg moet word, onderrig. In die studie word daar gekyk in hoe 'n mate leerders, aan die hand van hul ervaringe en voorafverkreë kennis, oplossingsstrategieë kan ontwikkel vir die oplos van twee gelyktydige vergelykings.

Die vraag wat ten grondslag van die studie lê, is: Met watter oplossingsstrategieë sal leerders vorendag kom en wat is die aard van hul interaksies indien hulle gekonfronteer word met materiaal wat binne die realm van 'n Realistiese Wiskunde Onderrigbenadering onderrig word?

In die volgende hoofstuk word 'n historiese oorsig van die didaktiese hantering van die oplos van gelyktydige vergelykings gegee.

HOOFSTUK 2: HISTORIESE OORSIG

In hierdie hoofstuk word 'n historiese oorsig van die didaktiese hantering van die oplos van gelyktydige vergelykings gegee. Daar word gekyk na vergelykings en die posisionering daarvan binne algebra. Verder word daar gewys op die verwantskap met ander onderwerpe binne algebra. In die didaktiese hantering word veral gelet op die oplossingsmetode van gelyktydige vergelykings en die aard van probleemstelling.

2.1 SIENING VAN ALGEBRA

Algebra is ontleen aan die Arabiese woord al jabr, wat "reduction of parts of the whole" beteken (Anderson, 1978:1). Volgens Anderson (1978) het algebra eers omtrent 1200 nC na die westerse wêreld gekom as gevolg van 'n boek, getiteld Hisab al jabr w'al muqabalah, wat deur Al-Khowarizmi, geskryf is. In die boek gee hy 'n oorsig van die verskillende metodes wat deur Hindoes en Arabiërs gebruik is om vergelykings op te los. 'n Uitvloeisel hiervan was dat mense na algebra verwys het as die oplos van vergelykings.

Daar word verskillende nuanses aan algebra toegedig. Vir sommige skrywers gaan dit oor die studie van strukture, vir andere die taal van Wiskunde en vir sommige oor die kodifisering van wiskundige wette. Maar hoe sien algebra in die huidige skoolopset daaruit? Voor 1960 was daar wye ooreenstemming oor die aard van algebra. Aanvanklik was die beskouing dat dit 'n veralgemening en 'n verlengstuk van rekenkunde is wat uit hoofde van sy abstrakte en simboliese vorm nie geskik was vir die meerderheid leerders nie. Hierdie standpunt kom nog algemeen voor, maar is nie die siening van die meerderheid nie. Algebra op skoolvlak word in 'n verskeidenheid nie-numeriese en numeriese tekste gevind en leerders word blootgestel aan verskeie aktiwiteite met 'n algebraïese inhoud.

Anderson (1978) onderskei vier benaderings tot algebra, naamlik:

- klassieke algebra;
- algebra as 'n studie van patrone en strukture;
- algebra as 'n studie van aksiomas; en
- algebra met behulp van konkrete sitasies.

2.1.1 Klassieke Algebra

Hierdie benadering is gemotiveer deur die soeke na oplossings vir vergelykings. Die Grieke het veral probleme oor vergelykings geformuleer en het in die era voor Diophantus baie min vordering met die oplossing daarvan gemaak. Dit word veral toegeskryf aan hul voorstelling van getalle as fisiese hoeveelhede (byvoorbeeld lynsegmente) en die feit dat oplossings verkry is deur verbale argumente - hierna verwys as retoriese algebra. Diophantus, 'n inwoner van Alexandria, het weer van afkortings gebruik gemaak en dit is later deur Hindoes en Arabiere gebruik in probleemoplossing. Die gebruik van simboolnotasie het egter stadig ontwikkel. Vieta (1540-1603) was die eerste persoon wat van letters gebruik gemaak het om onbekendes voor te stel en die gelykheidsteken is eers in 1557 deur Robert Recorde van Cambridge (Anderson,1978:2) ingestel.

2.1.2 Studie van patrone en strukture

Hierdie siening van algebra is 'n uitvloeisel van die bewuswording dat baie bewerings oor algemene wette rakende die gedrag van getalle ook van toepassing op nie-numeriese wiskundige entiteite soos versamelings, relasies, funksies, vektore, matrikse en meetkundige transformasies is. Daar word na ooreenkomste en verskille tussen die afdelings gesoek om struktuur aan die sisteem te gee. Hierdie afdelings wys op die noue verwantskap tussen die onderafdelings van Wiskunde en die wye toepassingsmoontlikhede daarvan.

2.1.3 Aksiomatiese siening

Volgens Anderson (1978) poog dié benadering om orde en sin aan algebra te gee. Aksiomas is omtrent 200 jaar gelede ingevoer en word gebruik in werk op universiteite. Hulle voorsien 'n grondslag vir logiese argumente en denke.

2.1.4 Konkrete benadering

Die voorafgaande drie benaderings leun swaar op simbole en die manipulasie daarvan. Soms word van apparaat gebruik gemaak om 'n wiskundige struktuur voor te stel. Leerders omskep dit in simbole en manipuleer die simbole om die fisiese apparaat voor te stel. 'n Voorbeeld hiervan is die teorie van Ohm se wet en die verskillende vorme daarvan, byvoorbeeld $A = V/R$, $V = AR$ *en* $R = V/A$. Hierdie is nie soseer 'n siening oor algebra nie, maar wel 'n konkrete benadering wat ruimte vir die skep van simbole en die manipulasie daarvan bied.

2.2 VERGELYKINGS

Vergelykings en die oplos daarvan het nog altyd die mensdom gefassineer. Vanaf die vroegste jare is probleme oor die onderwerp geformuleer en oplossings daarvoor gesoek. Die belangrikheid van die oplos van vergelykings vind neerslag in verskillende onderwerpe van Wiskunde. Die oplos van lineêre vergelykings speel 'n belangrike rol in die onderafdeling van lineêre algebra. Andersyds vind die oplos van gelyktydige vergelykings weer neerslag in matriksteorie wat een van die onderafdelings binne lineêre algebra is. Die oplos van vergelykings dien ook as voorloper tot die onderwerp, numeriese analise (Scheid, 1988:197). Een van die onderwerpe in dié afdeling is die oplos van differensiaal vergelykings. Netso is determinante in matriksteorie uitdrukkings wat hul oorsprong het in die oplos van stelsels lineêre vergelykings met een of meer onbekendes (Uspensky, 1948:181).

Uit voorafgaande volg dit dat die oplos van vergelykings 'n belangrike plek in algebra beklee. Vervolgens word daar gekyk hoe die metodes vir die oplossing van vergelykings oor die jare heen ontwikkel het en hoe die huidige opset daaruit sien. 'n Interessantheid hiervan is veral die probleemformulering.

2.2.1 Egiptiese werkswyse

In die Egiptiese opset is daar swaar geleun op reëls wat mondelings neergelê is. Oplossings is gedetailleerd gegee met al die nodige instruksies vir die oplossing - retoriese algebra. Hieronder volg 'n probleem (Chace, 1979:57) wat die Egiptiese retoriese werkswyse in die oplossing illustreer:

> *100 loaves of pesu 10 are to be exchanged for a certain number of loaves of pesu 45. What is this certain number?*

Egiptiese Verduideliking	Moderne Verduideliking
1. Vind die verskil tussen 45 en 10: 35 Deel 35 deur 10: $3 + \frac{1}{2}$	$(p - q)/q$
2. Vermenigvuldig $(3 + \frac{1}{2})$ met 100: 350. Tel 'n 100 by: 450	$[(p - q)/q]x + x$

3. Ruil 100 brode van 10 'pesu' vir 450 brode van 45 'pesu'.

$$y = [(p - q)/q]x + x$$
$$= (p/q)x$$

In die moderne werkswyse is x en y die aantal brode van q en p 'pesu' onderskeidelik. Bepaal nou y as x, p en q bekend is.

Soms het hulle vergelykings vanuit die vals aanname posisie opgelos. Die volgende probleem word aan die hand van die oplossingsmetode gedoen:

> *A quantity and its $\frac{1}{4}$ added together become 15. What is the quantity?* (Chace, 1979:57)

Moderne werkswyse: Gestel die onbekende getal is m. Dan is:

$$m+\tfrac{1}{4}m=15.$$
$$m = 12.$$

Die redenering vanuit die vals aanname posisie was as volg: As die antwoord 4 is, is 1 + $\frac{1}{4}$ van 4 gelyk aan 5. Om 15 te kry, moet 5 met 3 vermenigvuldig word. As 3 nou met die veronderstelde antwoord (wat vals is) vermenigvuldig word, word die korrekte antwoord 12 verkry. Die metode is veral baie gebruik voordat simboliese algebra ingestel is. Hierdie oplossingsmetode is algemeen in die Verenigde State van Amerika tot en met 1891 gebruik.

2.2.2 Babiloniërs

Die Babiloniërs het veral veranderlikes gebruik wat 'n noue verwantskap met elemente van meetkundige figure gehad het. So is daar byvoorbeeld na onbekendes verwys as die lengte en die breedte wat aansny by die hedendaagse gebruik van x en y om veranderlikes aan te dui. Die Babiloniërs se werkswyse vir die oplos van vergelykings verskil nie van die hedendaagse metode nie. Dit word geïllustreer aan die hand van 'n probleem wat geneem is van 'n tablet wat verkry is deur uitgrawings wat in 1949 in Tell Harmal gedoen is (Joseph, 1991:109):

> *If you are asked: Multiply two-thirds of [your share] by two-thirds [of mine] plus a hundred qa of barley to get my total share, what is [my] share?*

Oplossing: Daar word aanvaar dat die twee dele gelyk is.

1. Vermenigvuldig twee derdes met twee derdes: 0;26,40 ($\frac{4}{9}$).
2. Trek 0;26,40 af van 1: 0;33,20 ($\frac{5}{9}$).
3. Neem resiprook van 0;33,20: 1;48 ($1 + \frac{4}{5}$).
4. Vermenigvuldig 1;48 met 1,40 (100): 3,0 (180)

My aandeel is dus 3,0 qa gars.

$$\left(\tfrac{4}{9}\right)x + 100 = x$$

$$\left(\tfrac{5}{9}\right)x = 100$$

$$x = 180$$

Die metode is identies met die metode wat vandag gebruik word:

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)x + 100 = x$$

$$x = 180$$

<u>Nota</u>: 0;26,40 = $0(60)^0 + 26(60)^{-1} + 40(60)^{-2}$

3,0 = $3(60)^1 + 0(60)^0$

2.2.2.1 Gelyktydige vergelykings

Die oplos van gelyktydige vergelykings is op twee maniere deur die Babiloniërs benader. In die eerste metode is die vergelykings opgelos deur subtitusie. Die tweede metode is egter uniek. Dit word toegeskryf aan die werk van Diophantus

- die metode van oplossing dra dan ook sy naam (Joseph,1991:112). Hierdie metode was eie aan die Babiloniërs, maar is later deur Hellenistiese en Indiese wiskundiges oorgeneem. Diophantus se oplossingsmetode is as volg:

Een vergelyking is van die vorm x + y = s, terwyl die ander vergelyking enige ander vorm kan hê.

As x en y gelyk is, is x = y = $\frac{1}{2}s$.

Verder neem ons aan dat x vir $\frac{1}{2}s$ met w oortref.

Dan is x = $\frac{1}{2}s+w$ en y = $\frac{1}{2}s-w$

Vervang nou hierdie waardes vir x en y in die ander vergelyking (kan lineêr of kwadraties wees).

Verkry nou 'n vergelyking in w en los dit dan op.

Vervang die waarde van w in die vergelykings van x en y.

Verkry die oplossing vir die stelsel vergelykings.

2.3 ANDER OPLOSSINGSMETODES

Die literatuur (Anderson, 1978; Dreyer en Gildenhuys, 1984; Dreyer en Dreyer, 1984) lig vier metodes vir die oplos van twee gelyktydige vergelykings uit. Die vier oplossings word vervolgens bespreek aan die hand van die volgende probleem:

Los op vir x en y as:

$$2x + 3y = 11$$

$$3x - 5y = 7$$

2.3.1 Metode 1: Substitusie

$$2x + 3y = 11 \qquad (1)$$

$$3x - 5y = 7 \qquad (2)$$

Van vergelyking (1): 3y = 11 -2x

$$y = \tfrac{1}{3}(11 - 2x)$$

Die waarde van y word nou vervang in vergelyking (2)

$$3x - \tfrac{5}{3}(11 - 2x) = 7$$

$$9x - 5(11 - 2x) = 21$$

$$19x - 55 = 76$$

$$x = 4$$

Vervang die waarde van x in (1)

$$8 + 3y = 11 \text{ dan is } y = 1$$

Oplossing: x = 4 en y = 1

2.3.2 Metode 2: Eliminasie

Die metode staan ook bekend as die aftrekking van rye - beginsel wat by matrikse gebruik word.

$$2x + 3y = 11 \qquad (1)$$

$$3x - 5y = 7 \qquad (2)$$

Die vergelykings (1) en (2) word met geskikte reële getalle vermenigvuldig (nie 0) om die koëffisiënte van y numeries gelyk te kry.

(1)X5: $10x + 15y = 55$

(2)X3: $9x - 15y = 21$

Optelling van die vergelykings gee:

$$19x = 76$$

$$x = 4$$

Deur sustitusie in (1) is y = 1.

2.3.3 Metode 3: Lineêre kombinasies van vergelykings

Die metode toon 'n noue verwantskap met die tweede metode hierbo. Vanuit die twee vergelyking word die vergelyking

$$a(2x + 3y - 11) + b(3x - 5y - 7) = 0 \qquad (3)$$

gevorm met a en b reële getalle. As $x = x_1$ en $y = y_1$ die oplossing is vir vergelykings (1) en (2), sal dit ook die oplossing vir (3) wees. Waardes word nou vir a en b gekies om die koëffisiënte van y (of x) nul te maak. Die koëffisiënt van y is 3a - 5b; die uitdrukking word nul vir a = 5 en b = 3. Vir die keuse word (3):

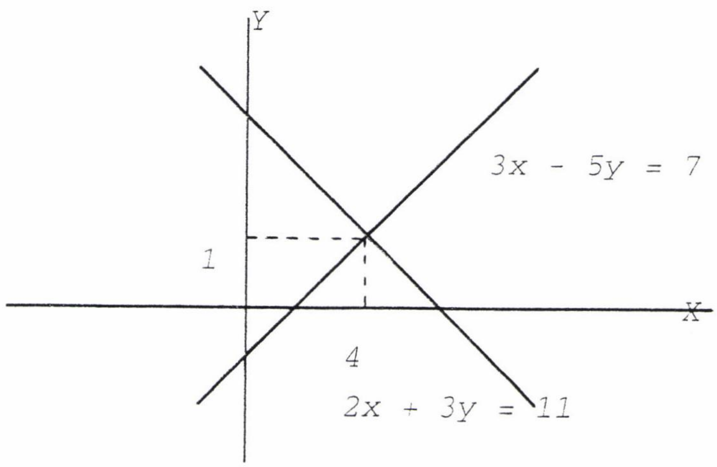
$$(10x - 55) + (9x - 21) = 0$$

$$19x - 76 = 0$$

wat weer lei na x = 4 en y = 1.

2.3.4 Metode 4: Grafiese oplossing

Vir die oplossing van vergelykings (1) en (2), word die vergelykings grafies voorgestel deur twee lyne. Die lyne stel dan die oplossings voor van die individuele lyne. Die punt waar die twee lyne mekaar sny, is die oplossing van die gelyktydige vergelykings.



Substitusie in die onderskeie vergelykings gee nou 8 + 3 = 11 (1) en 12 - 5 = 7 (2).

2.4 HUIDIGE OPSET

Die konteks waarin huidige opset gebruik word, is met verwysing na die situasie wat tans in die skoolopset heers. Die onderwyser wat die oplos van gelyktydige vergelykings onderrig, laat hom/haar deur die beskikbare bronne oor die onderwerp (skoolhandboeke) lei en word die benadering wat hy/sy volg, hierdeur bepaal. As onderwyser wat alreeds die onderwerp aan standerd 8 (graad 10) leerders onderrig het, kan ek bevestig dat die handboek wat ek gebruik het die benadering vir die onderrig van die onderwerp bepaal het. Verder laat die onderwyser hom/haar ook lei deur die probleme wat in die bronne aangegee word.

Verskillende bronne wat in skole vir die onderrig van die onderwerp gebruik word, volg in die meerderheid gevalle dieselfde metode(s) vir die onderrig van gelyktydige vergelykings. Vervolgens volg 'n samevatting van skoolhandboeke se inhoudelike oor die onderwerp:

Handboek: Standerd 8	Grafies	ALGEBRAïES	
		Sustitusie	Eliminasie
Wiskunde vir die klaskamer	1	3	2
Suksesvolle Wiskunde	1	3	2
Wiskunde Plus	1	3	2
Wiskunde in Aksie	1	3	2
Nuwe Moderne Wiskunde	3	2	1
Net Wiskunde	1	3	2

Tabel 1

1,2 en 3 verwys na die volgorde waarin die oplossingsmetodes vir die onderwerp aangebied word.

Voorafgaande weerspieël die tendens dat daar min verandering was ten opsigte van die onderrig van die oplos van gelytydige vergelykings. Oor die jare heen, dit wil sê vanaf die tydperke in Egipte en Babilonië tot en met die huidige opset het daar min verandering en innovering vir die onderwerp plaasgevind.

Probleemformulering vir die onderwerp volg dieselfde strekking deurdat die bronne deurgaans probleme met min of meer dieselfde inhoudelike as toepassings gee. In die meeste bronne wat binne skoolverband gebruik word, word die oplos van gelyktydige vergelykings ingelei deur 'n probleem van die aard:

Gegee die vergelykings $2x + 3y = 12$ en $3x - 2y = 5$. Bepaal die waardes vir x en y.

In die afdeling oor bewoorde probleme wat 'n 'konkrete konteks' vervat en wat uiteindelik lei na gelyktydige vergelykings, is die aanknopingspunt vir die meerderheid bronne 'n probleem oor getalle. 'n Klassieke voorbeeld hiervan is:

> *Die som van twee getalle is 53. Die verskil van die twee getalle is 7. Bepaal die twee getalle.*

Alhoewel die probleem aangegee word as 'n probleem oor gelyktydige vergelykings, hou die volgende oplossing min daarmee verband:

32 + 21 = 53 (skatting)

32 - 21 = 11

30 + 23 = 53

30 - 23 = 7

Die twee getalle is dus 30 en 23.

Dié aard van probleemformulering sluit dan ook aan by toepassings wat deur Babiloniërs gebruik is oor figure om die lengte en breedte te bepaal.

Met verwysing na die wyse waarop die onderwerp oor gelyktydige vergelykings oor die jare heen en in huidige skoolhandboke hanteer is, wil die studie wegbeweeg van dié tendens. Aspekte wat aandag gaan geniet is onderrigbenadering en probleemformulering. In die lig hiervan volg 'n beskouing van die Realistiese Wiskunde Onderrigbenadering in die volgende hoofstuk wat as teoretiese raamwerk vir die studie dien.

HOOFSTUK 3: REALISTIESE WISKUNDE ONDERRIG AS TEORETIESE RAAMWERK

Vuleka - to Open Up and Enlighten.

3.1 INLEIDING

Waar die klem binne konteks van die tradisionele raamwerk van Wiskunde-onderrig val op die produkbenadering, dit wil sê retensie en vaardighede om probleme op te los, word daar 'n verskuiwing na 'n nuwe raamwerk voorgestel. Hierdie nuwe raamwerk moet in 'n verre mate poog om:

- doelwitte soos geformuleer in hoofstuk 1 te laat realiseer;
- as benadering weg te beweeg van die tradisionele manier van onderrig; en
- Wiskunde as skoolvak te vestig om sodoende die aantal leerlinge wat die vak as eksamenvak neem, te laat toeneem.

'n Relatief algemene uitvloeisel van die huidige tradisionele manier van Wiskunde-onderrig is dat leerders ten spyte van verwerwing van omvangryke feitelikhede nie die belangrike konsepte en beginsels wat die verworwe feitelikhede ten grongslag lê, begryp nie. Hierdeur word slegs die denkvaardigheid van memorisering benut en is leerders slegs met die weergee van inligting gemoeid.

Om as onafhanklike leerder binne konteks van die Wiskunde klaskamer te funksioneer, is hierdie denkvaardigheid van memorisering onvoldoende om die wetenskaplike metode van probleemoplossing toe te pas, en word verdere denkvaardighede soos begrip, toepassing, analise, sintese en evaluering benodig. Teen hierdie agtergrond word dit gerade geag om te besin oor die operasionalisering van Wiskunde aan die hand van Realistiese Wiskunde Onderrig as teoretiese raamwerk.

Alvorens Realistiese Wiskunde Onderrig as benadering bespreek word, word daar besin oor hoe en waar die benadering ontstaan het en word daar dan ook verwys na die persoon wat instrumenteel was om die benadering te vestig en later uit te bou.

3.2 ROL VAN HANS FREUDENTHAL

Realistiese Wiskunde Onderrig as benadering het sy oorsprong in Nederland gehad. Hans Freudenthal (17 September 1905-13 Oktober 1990) word as die skepper van Realistiese Wiskunde Onderrig beskou. As wiskundige en opvoedkundige het hy in noue kontak gekom met andere wiskundiges en opvoedkundiges wat later 'n invloed op sy denke gehad het.

Hierdie kontak is veral opgebou met sy lidmaatskap aan verskeie Wiskunde-verenigings. Na afloop van die Tweede

Wêreld Oorlog was hy lid van 'n Wiskunde Studiegroep waar hy lesings aangebied het. Hy het ook 'n rol gespeel in die stigting van die Instituut van Wiskunde Onderrig (IOWO) in 1971. Later het hy direkteur van die Instituut geword en het die IOWO betrokke geraak by Wiskunde-onderrig op primêre skoolvlak. Dit het hy hoofsaaklik gedoen as deel van die WISKOBAS-projek (Wiskunde Op de Basisschool) en onder die vaandel van die IOWO is WISKOBAS in 1971 op die pad van Realistiese Wiskunde Onderrig geplaas. Hierdie projek het gewerk aan die samestelling van 'n nasionale kurrikulum vir rekenkunde vir die primêre skool. Hy het ook later betrokke geraak by inisiatiewe wat gemoeid was met Wiskunde-onderrig op sekondêre skoolvlak.

Freudenthal het voortdurend 'n pleidooi gelewer dat Wiskunde meer toeganklik moet wees. Hieruit het hy na wyses gesoek om Wiskunde betekenisvol te maak. Die onderstaande aanhaling bevegtig sy pleidooi:

> ... *we should teach mathematics so as to be more useful.*
>
> (Freudenthal, 1968:3)

Die rol wat die onderwyser in die onderrigproses vervul kom ter sprake. As inisieerder van betekenisvolle onderrig hang dit af van die filosofie wat hy/sy teenoor Wiskunde-onderrig huldig. Vir Freudenthal is betekenisvolle Wiskunde-onderrig nou verweef met die filosofie wat teenoor die onderrig van Wiskunde gehuldig word:

> *there is no educator without a teaching philosophy, or should I say, with two teaching philosophies; an explained philosophy he (sic) confesses and an explicit one he (sic) acts out.* (Freudenthal,1971:413)

Hans Freudenthal gaan van die veronderstelling uit dat wiskundige konsepte, strukture en idees dien om die fenomena van die leefwêreld te organiseer. Hierby word die terrein vir die aanleer van Wiskunde ingesluit. Die ontwikkeling van Wiskunde en konstruksie daarvan het as beginpunt die algemene kennis van die leerder. Daar word dus aanvaar dat die leerder met sekere wiskundige inhoude die klaskamer betree. Leer en ontwikkeling van Wiskunde word gesien as 'n kontinue proses van matematisering op verskillende vlakke en in alle rigtings. Die volgende lê ten grondslag van Freudenthal se benadering:

- Wiskunde as 'n aktiwiteit;
- 'n ryk konteks;
- struktuur en aard van die leermateriaal;
- matematisering;
- kontinue leerproses; en
- verhoging van die vlakke van refleksie.

Vervolgens volg 'n eksposisie van Realistiese Wiskunde Onderrig.

3.3 REALISTIESE WISKUNDE ONDERRIG

As uitgangspunt neem Realistiese Wiskunde Onderrig dat Wiskunde vanuit historiese en individuele perspektiewe, begin in die werklikheid/realiteit. Wiskundige situasies word nie aan die leerder voorgehou om dan met realiteite gevul te word nie. Inteendeel, hierdie situasies begin vanuit die realiteit van die leerder en is nie rigied nie, maar daar is deurlopende/kontinue verandering in die leerprosesse van die leerder as gevolg van sy betrokkenheid by die situasies.

Binne die realm van Realistiese Wiskunde Onderrig staan konteks sentraal. Dit is veral belangrik wanneer materiaal ontwikkel word. Die begin van enige sub-kurrikulum vind plaas binne die werklikheid van 'n wêreldsituasie. Hierdie werklikheid word nie beperk tot die fisiese of sosiale wêreld nie. Die innerlike realiteit van Wiskunde sowel as die leefwêreld van die verbeelding van die leerder skep bronne vir die ontwikkeling van wiskundige konsepte. Volgens Freudenthal is die algemene kennis van die leerder nie net die dryfveer agter die leer van Wiskunde nie, maar word dit ook deur Wiskunde te doen, ontwikkel. Leerders se ondervindinge van hul daaglikse lewe moet nie onderdruk word nie, maar erken word aangesien dit as beginpunt vir die leerproses kan dien.

Vir Freudenthal is dit dus belangrik dat die leerder self, ofskoon deur begeleiding van die onderwyser, geleentheid moet kry om intuïtiewe ondervindinge te hervorm tot meer wetenskaplike prosesse. Hy beveel dus sterk aan dat aktiwiteite vanuit dié ondervindinge geïnisieer word.

Eerstens word die probleem vanuit die werklikheid intuïtief ondersoek met die oog op die omskepping daarvan in 'n wiskundige probleem (matematisering). Dit kom neer op die organisering en strukturering van die probleem met die oog op identifisering van wiskundige konsepte daarvan om uiteindelik reëlmatighede te ontdek. Hierdie aanvanklike eksplorasie wat 'n sterk intuïtiewe inslag het, lei na die ontdekking of herontdekking/herskepping van wiskundige konsepte. Ten grondslag van Realistiese Wiskunde Onderrig lê die volgende drie didaktiese beginsels:

- matematisering;
- geleide herontdekking; en
- didaktiese fenomenologie.

3.3.1 Matematisering

Volgens die siening van Hans Freudenthal is Wiskunde 'n aktiwiteit wat in die uitvoer van die volgende aktiwiteite tot sy reg kom:

- lokale en globale ordening;
- skematisering; en
- formalisering en simbolisering.

As aanvoerpunt vir genoemde aktiwiteite dien die werklikheid van die leerder as beginpunt waarin die probleem gesetel is.

Binne dié konteks word probleme geformuleer en leerinhoude georganiseer. Waar daar algemeen geglo is dat die aktiwiteit van organisering die voorreg van die onderwyser is, is Hans Freudenthal as voorstander van Realistiese Wiskunde Onderrig, die mening toegedaan dat die leerder, uit hoofde van sy betrokkenheid by die leerstof en deurdat sy werlikheid met 'n konkrete situasie aangespreek word, direk betrokke by die organisering van die leerstof is. Waar probleme binne die konkrete konteks van die leerder geformuleer word, moet dié proses deurlopend gevolg word in die onderrig van die leerder. Daar moenie later afgewyk word na 'n stelsel waar die leerder van voorafbereide vooropgestelde reëls voorsien word om probleme op te los nie.

Hans Freudenthal plaas 'n hoë premie op die lokale en globale ordening van leerstof. Hierdie aktiwiteit van ordening/sistematisering beteken in wese vir hom matematisering. Hierdeur raak matematisering 'n organiserende aktiwiteit wat beheer word deur dit wat plaasvind in die situasie waarin die leerder(s) en leerstof betrokke is en wat deur beskikbare wiskundige aktiwiteite gerugsteun word. Deurdat die leerder betrokke by strukturering en organisering van Wiskunde is, maak hy/sy dit sy/haar persoonlike eiendom. Die gestelde doelwit van toepassingsmoontlikhede van Wiskunde, kan alleenlik met die leerder bereik word in situasies wat gematematiseer kan word.

Volgens De Lange (1987:41) is matematisering 'n organiserende aktiwiteit waarvolgens kennis bekom word en waarin alreeds verworwe vaardighede en kennis gebruik word om onbekende reëlmatighede, verwantskappe en strukture te ontdek. Hierdie reëlmatighede en verwantskappe word ontdek deur middel van skematisering en visualisering wat benodig word om spesifieke Wiskunde in die gegewe algemene konteks te identifiseer. Treffers en Goffree (De Lange, 1987:43-44) onderskei weer twee komponente vir matematisering, naamlik 'n horisontale en vertikale komponent.

Van die volgende aktiwiteite resorteer onder die horisontale komponent:

- identifisering van spesifieke Wiskunde in 'n algemene konteks;
- skematisering;
- formulering en visualisering van 'n probleem op verskillende maniere;
- ontdekking van verwantskappe;
- ontdekking van reëlmatighede;
- herkenning van isomorfiese aspekte in verskillende probleme;
- oordra en omskepping van 'n probleem in die werklikheid na 'n probleem in Wiskunde; en
- oordra en omskepping van 'n probleem in die werklikheid tot 'n bekende wiskundige model.

Daarenteen verwys die vertikale komponent na die volgende aktiwiteite:

- voorstelling van 'n verwantskap aan die hand van 'n formule;
- bewys van reëlmatighede;
- verfyning en aanpassing van modelle;
- gebruik van verskillende modelle;
- kombinering en integrering van modelle;
- formulering van 'n nuwe wiskundige konsep; en
- veralgemening.

Terwyl die vertikale komponent neerkom op die kompartementalisering van Wiskunde onderwerpe en onderrig daarvan, word die kwessie van verwantskappe tussen onderwerpe en verbandsiening deur die horisontale komponent aangespreek. Vir Wiskunde om werklik betekenisvol te wees, moet beide die horisontale en vertikale komponente van matematisering tot hul reg kom. In die onderrigpraktyk is die twee komponente nou verweef.

Matematisering gaan gepaard met gedurige refleksie. Refleksie moet plaasvind in alle fases van matematisering. Die leerder reflekteer oor sy persoonlike prosesse in matematisering, bespreek dit met medeleerders en evalueer dan die produk en resultate van sy matematisering. Horisontale en vertikale matematisering spruit voort vanuit die leerder se aksies en refleksie op sy aksies. Matematisering is slegs van waarde waar dit gerealiseer word in interaktiewe onderrig, dit wil sê onderrig wat geleentheid bied vir bespreking, konsultasie en samewerking. Realistiese Wiskunde Onderrig bied 'n sterk geleentheid tot horisontale en vertikale matematisering.

3.3.2 Herontdekking

In die huidige institusionele skoolopset is daar min geleentheid vir die leerder om op sy eie of met hulp van ander tot herontdekking van die leerstof te kom - miskien moontlik vir die begaafde leerder. Hans Freudenthal beklemtoon dat Wiskunde as aktiwiteit geleentheid aan die leerder moet bied om binne sy portuurgroep tot herontdekking te kom. Streefland motiveer dit as volg:

> *First knowledge and ability, when acquired by one's own activity, stick better and are more readily available then when imposed by others. Second discovery can be enjoyable and so learning by reinvention may be motivating. Third it fosters the attitude of experiencing mathematics as a human activity.*
>
> (Streefland, 1993:47)

Waar die onderwyser tans Wiskunde onderrig aan die hand van definisies, reëls, skemas, algoritmes en formules werk dit beperkend in op die bydrae van die leerder. Die leerder se bydrae word hoofsaaklik beperk tot die oplos van probleme.

Onderrig van Wiskunde moet die leerder geleentheid bied tot:

- matematisering;
- abstrahering;
- skematisering;
- formalisering;
- algoritmisering; en
- verbalisering.

Beweging deur genoemde aktiwiteite of van een vlak na 'n ander vind plaas deurdat alreeds verworwe kennis van een vlak as bron in 'n ander vlak gebruik word. Daar alles in aanvang neem in 'n aktiwiteit, word dit beskou as die laagste vlak en as beginpunt vir enige Wiskunde wat daaruit moet volg. In die opsig vervul die onderwyser die rol van begeleide in die proses om die leerder in staat te stel om bogenoemde te verwesenlik. Die leerder kan dan nou waardevolle vaardighede en kennis makliker aanleer, onthou en toepas.

Herontdekking as didaktiese beginsel van Realistiese Wiskunde Onderrig is nou verweef met die konteks en die aktiwiteit wat in die konteks gesetel is. Hulpmiddels moet sinvol en relevant wees ten opsigte van die leefwêreld van die leerder. Wiskunde as menslike aktiwiteit begin vanuit die werklikheid waar dit ontdek was en dit moet nou weer deur die leerder herontdek word. Konteks verwys dus na die terrein van realiteit/werklikheid wat deur 'n sekere leerproses ontsluit word vir die leerder om gematematiseer te word.

3.3.3 Didaktiese fenomenologie

Fenomenologies gesien het Wiskunde as 'n menslike akiwiteit bestaansreg gekry as gevolg van matematisering. Dit is didakties beantwoordbaar deur die didaktiese beginsel van herontdekking. Matematisering het ten doel die matematisering van die werklikheid of gedeeltes daarvan. Hierdie matematisering word nou didakties getransformeer in herontdekking. Die beginsel van herontdekking word deur didaktiese fenomenologie aangevul. Didaktiese fenomenologie is besinning oor dit wat werd is om gematematiseer te word en die wyse hoe die leerproses in dié opsig moet verloop. In die opsig staan die leerstof sentraal. Ten grondslag van Hans Freudenthal se fenomenologie lê die mentale voorwerpe (mentale objecten).

Vir die onderwyser as ontwerper van leermateriaal word verwag om na fenomena/veskynsels in die omgewing/werklikheid van die leerder te soek om hom/haar sodoende daarmee te konfronteer met die doelwit om tot matematisering te kom en mentale voorwerpe te vorm. Hierna volg organisering en analisering om die fenomeen meer toeganklik vir berekeninge en denkaksies te maak en dit lei uitendelik tot begripvorming. Didaktiese fenomenologie is gemik op die aanleer van dit wat benodig word vir organisering. Bereiking van 'n hoër vlak in die leerproses/denkproses deur matematisering word gerealiseer as gevolg van die beginsel van herontdekking en didaktiese fenomenologie wat op sy beurt die weg baan vir ontwikkeling van leeraktiwiteite waarin die matematiseringsproses kan geskied.

3.4 VYF ONDERRIGBEGINSELS

In die besinning oor hoe om die onderrig van Wiskunde binne die raamwerk van Realistiese Wiskunde te laat slaag, word vyf onderrigbeginsels deur Treffers (1989) geformuleer. Die onderrigbeginsels is as volg:

3.4.1 Konstruksies moet deur die konkrete gestimuleer word

Die werklikheid dien beide as bron vir konsepte, idees, berekeninge en strukture en ook as terrein waarin dit toegepas moet word. Dit is in die konteks waarin die konkrete gebruik word. Die werklikheid val binne die leefwêreld van die leerder en konteks bied aan die leerder geleentheid tot konkrete situasies. Konkreet verwys dan ook na die aanpassing van die inhoud wat onderrig word om binne die vermoë van die leerder se informele strategieë te val.

3.4.2 Ontwikkeling van hulpmiddels

Die aanleer van 'n wiskundige konsep of vaardigheid, is 'n proses wat oor die langtermyn geskied en wat deur verskillende vlakke van abstraksie beweeg. Geleenthede moet dus geskep word vir die leerder om deur die optimum moontlike vlakke van abstraksie te beweeg. Die onderwyser kan dus 'n belangrike rol vervul in die ontwikkeling van aktiwiteite vir gebruik in die leersituasie om die beweging deur die vlakke van abstraksie moontlik te maak. Die aktiwiteite moet van so aard wees dat die leerder daardeur gekonfronteer word om op sy eie en deur begeleiding van die onderwyser van die konkrete na die abstrakte vlak te beweeg.

3.4.3 Stimulering van produksie en refleksie

Die aanleer van Wiskunde en die verhoging in denkvlakke word aangehelp deur refleksie. Verder word dit aangehelp deur gereelde besinning oor denkprosesse en insette van medeleerders in die leersituasie. Van die onderwyser word verwag om geleenthede te skep vir die leerder om te reflekteer oor dit wat alreeds gebeur het en om vooruitbeskouings te maak oor dit wat kan volg. Die onderwyser kan dus aan die hand van spesifieke opdragte meehelp in die stimulering van vrye produksies vanaf die leerder se kant om sodoende tot selfontdekking te kom.

3.4.4 Leer deur interaksie

Leer word gesien as 'n sosiale aktiwiteit wat geskied binne 'n sosiale skoolomgewing. Die leerder as individu binne die klasopset en te midde van medeleerders kry dus geleentheid tot interaktiewe leer - in die sin dat die leerder betrokke raak met die inhoud, daaroor kommunikeer met medeleerders en die onderwyser. Kommunikasie, argumente, debattering en evaluering is nodige prosesse in interaktiewe leer. Hierdie interaksie bied geleenthede tot vergelyking van idees en werkswyses asook besinning oor denkprosesse.

3.4.5 Verwewing van inhoude

In die onderrig van Wiskunde gaan dit ook om verwantskappe en om die noue verweefdheid van verskillende afdelings in die Wiskunde tot 'n geheel uit te bou. Hierdeur kry die leerder geleentheid tot sinvolle en goed gestruktureerde kennis en vaardigheid wat wys op die toepassingsmoontlikhede van die vak.

3.5 TEORETIESE RAAMWERK

Vervolgens is dit belangrik om te besin oor 'n teoretiese verwysingsraamwerk waarbinne die ondersoek in hierdie studie sal val. Die volgende beginsels word as raamwerk geformuleer geïnisieer vanuit Realistiese Wiskunde Onderrig:

3.5.1 Wiskunde is 'n sosiale aktiwiteit en geskied vanuit die leefwêreld van die leerder.

3.5.2 Die onderwyser as inisieerder van die leersituasie formuleer probleme binne die werklikheid en begelei die leerder waar nodig om binne die werklikheid te bly.

3.5.3 Verder ontwikkel die onderwyser leeraktiwiteite wat binne die leefwêreld van die leerder val.

3.5.4 Die inhoud van die leerstof en die leermiddels moet die leerder geleentheid bied tot:

3.5.4.1 interaktiewe, interpretiewe en koöperatiewe leer.

3.5.4.2 skepping van vrye produksies en refleksie daaroor.

Met hierdie teoretiese verwysingsraamwerk as uitgangspunt, word in die volgende hoofstuk klem geplaas op die ontwikkeling van aktiwiteite en leerstof om sodoende die teelaarde te skep om met implementering te lei na realisering van beginsels 3.5.1 tot 3.5.4 hierbo.

HOOFSTUK 4: NAVORSINGSMETODOLOGIE

4.1 INLEIDING

Die studie wat as 'n ontwikkelingsondersoekstudie bekend staan, is gefundeerd in die Realistiese Wiskunde Onderrigbenadering. Hierdie teorie van Realistiese Wiskunde Onderrig wat oor twintig jaar deur ontwikkelende navorsing ontwikkel is, vereis aan die hand van een van die vyf beginsels (3.4.2) waarop dit rus, dat leeraktiwiteite ontwikkel word.

Die ontwikkeling van leeraktiwiteite vorm 'n belangrike bousteen van Realistiese Wiskunde Onderrig. Ontwerpte leeraktiwiteite wat vir dié doel ontwerp word, dien om die konkrete konteks te verskaf. In die lig hiervan vorm ontwikkeling van leeraktiwiteite 'n belangrike ondertoon van die studie en as sulks het ontwikkelingsondersoek ter sprake gekom. Vervolgens volg 'n oorsig van wat ontwikkelingsondersoek behels en dit word opgevolg met dataversamelingstegnieke wat vir die studie gebruik gaan word.

4.2 ONTWIKKELINGSONDERSOEK

Ontwikkelingsondersoek is 'n navorsingsmetodologie wat al hoe meer in vakdidaktiese-gesentreerde ondersoeke gebruik word met die klem op ontwikkeling van leeraktiwiteite. Volgens Goffree (1985) aan wie die ontstaan vir die naam ontwikkelingsondersoek toegedig word, dui dit op 'n ondersoek met 'n sterk ontwikkelingsinslag. Ondersoekuitkomste wat hieruit volg, moet 'n bydrae tot kurrikulumontwikkeling maak en toepasbaar in die praktyk wees.

In die ontwikkelingsaspek van ontwikkelingsondersoek gaan dit nie net oor die ontwerp van leeraktiwiteite nie, maar 'n soeke na antwoorde op vrae en oplos van probleme wat in die duur van die ontwikkelingsondersoek geïdentifiseer word.

Volgens Freudenthal (1988) is daar 'n noue verwantskap tussen die ontwikkelings- en ondersoekkomponente. Hierdie verwantskap het 'n sikliese aard wat afwisselend geskied vir dié twee komponente. As gevolg van die sikliese aard het dit wat in een fase van die ontwikkelingsondersoek bereik is, 'n uitwerking op dit wat vir 'n volgende fase ontwerp word.

Freudenthal spreek ook die kwessie van geldigheid en validiteit van 'n ontwikkelingsondersoek aan:

> *Developmental research means:*
> *experiencing the cyclic process of development and research so consciously, and reporting on it so candidly that it justifies itself, and that this experience can be transmitted to others to become like their own experience.* (Freudenthal, 1991:161)

'n Ontwikkelingsondersoekstudie kan as volg saamgevat word:

- dit het ten doel die verbetering van die praktyk;
- leeraktiwiteite het 'n sterk vakdidaktiese inslag;
- teorie en praktyk is nou verweef;
- daar moet noue samewerking tussen onderwyser as ontwikkelaar van leeraktiwiteite, leerders en waarnemers wees;
- die studie leen hom tot verskillende metodes binne die ondersoek; en
- die studie is siklies van aard, dit wil sê uitkomste van voorafgaande ontwerpte leeraktiwiteite gaan die aard en vorm van die daaropvolgende leeraktiwiteite beïnvloed.

Vir die studie val die klem op ontwikkeling van leeraktiwiteite en klaskamereksperimente vir die implementering daarvan. Die studie oor die ontwikkeling van oplossingsstrategieë vir twee gelyktydige lineêre vergelykings word dus uitgevoer onder die konsep van 'n ontwikkelingsondersoek. Dit beteken dat die oplos van twee gelyktydige lineêre vergelykings as 'n bron van denke ("*vehicle of thought*", aldus Streefland, 1988) dien vir die teoretiese raamwerk waarin die studie geskied.

Die studie het 'n sterk ondersoekende inslag wat wil ondersoek met watter oplossingsstrategieë, standerd 6 (graad 8) leerders vorendag kom vir die oplos van twee gelyktydige lineêre vergelykings. Hierdeur word daar gepoog om met die bydrae insette te lewer tot die debat vir die skryf van die Wiskunde-kurrikulum wat in die toekoms in werking tree.

4.3 DATAVERSAMELING

Data vir analise van die ondersoek word geneem uit materiaal wat die volgende insluit:

- voltooide werkblaaie van die leerders;
- didaktiese deliberasies;
- waarnemingsnotas van waarnemers;

Werkblaaie is vir die klaskamereksperimente ontwerp en aan Cyril Julie voorgelê. Hierdie didaktiese deliberasies met hom is gebruik vir die (her)ontwerp van verdere werkblaaie. Die werkblaaie is ook aan Abdurahouf Cassiem voorgelê vir kommentaar. Abdurahouf is 'n kollega van my aan Weltevrede Sekondêr te Wellington. Hy is verantwoordelik vir die onderrig van Wiskunde in standerd ses (graad 8). Die werkblaaie van die leerders verwys na die werk wat leerders in die loop van die klaskamereksperimente gedoen het.

In die loop van die klaskamereksperiment was Cyril en Abdurahouf teenwoordig as waarnemers en het in die proses notas oor hul waarnemings gemaak. Hierdie didaktiese deliberasies, werkblaaie van leerders en waarnemingsnotas is nou gebruik in die ontwerp van werkblaaie vir die volgende fase om die verloop van dié fase te verander indien nodig.

In die volgende hoofstuk word daar besin oor die verloop van die eerste klaskamereksperiment met die gepaardgaande refleksie en analise daaroor.

HOOFSTUK 5: IMPLEMENTERING: EERSTE FASE

To study is not to consume ideas, but to create and re-create them. (Freire, 1985:4)

5.1 INLEIDING

Daar die studie binne 'n teoretiese raamwerk met Realistiese Wiskunde Onderrig as vertrekpunt geskied, is gepoog om materiaal te ontwerp om hieraan te voldoen. Uit hoofde hiervan was die aanknopingspunt vir ontwerp van materiaal kontekste vanuit die werklikheid van die leerder. Verder moes die inhoudelike van die materiaal hierdie kontekste vergestalt.

5.2 ONTWERP VAN WERKBLAAIE

Ek en Cyril Julie het op Donderdag 2 Mei 1996 by die Universiteit van Wes-Kaapland ontmoet om die ontwerp van werkblaaie te bespreek. Hierdie gesprek was 'n opvolg van 'n sessie wat Cyril met universiteitsstudente oor die oplos van gelyktydige vergelykings aangebied het. 'n Uitvloeisel hiervan is die werkblad getiteld Geheime Boodskappe (eerste versie - sien bylae A). Gesprekvoering op 2 Mei het gesentreer om die ontwerpte werkblad 'n meer realistiese inslag te gee. Na afloop van die insette van Cyril en verskeie probeerslae, het die werkblad getiteld

Geheime Boodskappe (tweede versie) die lig gesien (sien bylae B).

Die werkblad (bylae B) poog om die boustene van Realistiese Wiskunde Onderrig vas te vat, en die inhoudelike van die werkblad het sy oorsprong in die onderwerp, Kriptografie. Dié onderwerp maak gebruik van kodes om sodoende boodskappe geheim te hou. Julius Caesar, die Romeinse regeerder, het dit byna 2000 jaar gelede gebruik om boodskappe na sy generaals op die slagveld te stuur (Grolier, 1979:369). In die Tweede Wêreld Oorlog het Amerikaners kodeboodskappe van Japan onderskep en ontsyfer en hierdeur is hulle in staat gestel om inligting oor die Japanse vloot te bekom (Grolier, 1979:369). Vandag maak bankinstansies van kodering op kredietkaarte gebruik wanneer 'n kredietkaart aan 'n kliënt uitgereik word.

5.3 PLEK VAN IMPLEMENTERING: WELTEVREDE SEKONDêR

Weltevrede Sekondêr is een van vier sekondêre skole in Wellington en is geleë tussen oorwegend 'Kleurling' woonbuurte waaruit meerderheid van die skool se leerders kom. Sommige van die leerders is woonagtig in die informele area wat as Egoli bekend staan - woonhuise bestaan hoofsaaklik uit tydelike hout-en sinkstrukture, en twee groter woonbuurte, Van Wyksvlei en Peyton. Vir die afgelope twee jaar het daar ook leerders vanuit die woonbuurt Mbekweni hulle by die skool ingeskryf.

Die klas in die studie was leerders in standerd 6 (graad 8) en dit is hul eerste jaar aan Weltevrede Sekondêr. Die leerders ontvang vakonderwys en Abdurahouf Cassiem was verantwoordelik vir die onderrig van Wiskunde. Die klas het bestaan uit 34 leerders, maar met die implementering van die eerste fase was daar 32 leerders teenwoordig. Die 32 was saamgestel uit 15 seuns en 17 dogters en die gemiddelde ouderdom van die leerders was 14 jaar. Die groepsamestelling van die leeders was as volg:

	GROEP					
	1	2	3	4	5	6
SEUNS	1	1	6	1	2	3
DOGTERS	5	5	0	3	2	3
TOTAAL	6	6	6	4	4	6

Tabel 2

5.4 AANBIEDING

Die aanbieding is voorafgegaan deur 'n bespreking met Abdurahouf oor die werkblad en die wyse waarop die aanbieding sou geskied. Abdurahouf het oor die werkblad opgemerk dat die taal van die werkblad moontlik problematies vir die leerders sou wees en dat die vrae in die werkblad moeilik was. Hy sou sorg vir al die reëlings in verband met die klas. Die skool volg die 7-dag sikliese rooster met 7 periodes per dag en periodes was 40-50 minute lank. Daar is verder ooreengekom dat ons weer sou vergader om die lesaanbieding te bespreek.

Vir die aanbieding van die les is daar op Maandag 13 Mei 1996 onderhandel dat die werksessie (klaskamereksperiment) op Woensdag 15 Mei oor 3 periodes aangebied sou word met periodes 40 minute lank. Abdurahouf het ook die reëlings met die skoolhoof uitgeklaar.

Voor die aanbieding van die les is daar met Cyril Julie oor die ontwerpte werkblad (bylae B), die onderwysersgids (bylae E) en die stuk wat as lesaanbieding (bylae C) voorberei is, gekonsulteer. Daar is na afloop hiervan ooreengekom dat die lesverloop as volg sou geskied. Die lesaanbieding sou geskied sonder om die voorbeeld oor hoe die kodeboodskap verkry word, te behandel. Dit kon in die lesverloop gebruik word as 'n inset wanneer leerders sou sukkel om die taal van die werkblad te omskep in aksie. Na afloop van die insette van Cyril Julie is 'n nuwe lesaanbieding (bylae D) saamgestel.

In die aanbieding is leerders van die volgende voorsien: werkblad, skryfpapier en skryfbehoeftes waar dit ontbreek het. Ek het die lesaanbieding behartig, terwyl Cyril en Aburahouf as waarnemers opgetree het.

5.5 BESKRYWING EN ANALISE VAN IMPLEMENTERINGSGEBEURE

Vir die ontwerp van die werkblad vir die eerste fase is daar swaar geleun op die konkrete en visuele wat binne die ervaringsveld van die leerders moes val. So ver moontlik is daar gepoog dat die werkblad, inhoudelike situasies wat alledaags voorkom en van dag tot dag deur leerders ervaar en gesien word, vergestalt. In die algemeen sien die leerder egter baie weinig die verwantskap van hierdie bekende situasies en die wiskunde in die klaskamer. Vervolgens word daar gereflekteer oor die implementering, die analise van die leerders se bydraes en hul interaksies met die materiaal vervat in die werkblad.

In die analise word gekyk na die oplossings waarmee leerders na vore kom vir die verskillende probleme. Insette wat in die loop van die lesaanbieding gemaak word, ter verduideliking of verstewiging van die werk, is ook belangrik in die lig van die werkblad wat vir 'n tweede fase ontwerp moes word. Observasies en insette van die waarnemers is ook deel van die analise. Vervolgens volg 'n bespreking van die werkblad en daarna die oplossings van die leerders in probleemverband.

5.5.1 Werkblad (bylae B)

Die eerste werkblad het uit 4 probleme bestaan. Die vier probleme kan as volg opgesom word. Probleem 1 het gehandel oor die toets van 'n reël aan die hand van 'n alfabet-spiraal en die formulering van 'n tweede reël. In probleem 2 en 3 het die vestiging van die twee reëls van probleem 1 ter sprake gekom. Probleem 4 het gehandel oor dekodering, naamlik die omskepping van 'n kodeboodskap in 'n gewone boodskap aan die hand van die gegewe reëls. Hierdie probleem lê ten grondslag van die studie oor die oplos van twee gelyktydige lineêre vergelykings.

5.5.2 Probleem 1

Die probleem het verwys na die toepassing van die eerste reël en die afleiding van die tweede reël. Die leerders het nie probleme ondervind met die afparing van die boodskap nie en die afparing is op verskillende wyses gedoen.

Leerders in sommige groepe het die vraag oor die bepaling van die tweede reël misgekyk en begin met die tweede probleem. Op hierdie tydstip het ek die voorbeeld oor DRUIP gedoen. Hieronder volg 'n skryfbordtabel (bylae H) van die voorbeeld wat op die skryfbord gedoen is:

1. *Boodskap: D R U I P*
2. *Syferwaarde: 14 10 9 12 23*
3. *Reël: Letter in boodskap + 2*
4. *Nuwe syferwaarde: 16 12 11 14 25*
5. *Kodeboodskap: B I S D G*

Die inset oor DRUIP het meegebring dat leerders presies dieselfde reël by hul probleem toegepas het. Leerders het die voorbeeld oor DRUIP nageboots en het JOHN met dieselfde reël (Letter + 2) gekodeer.

Syfernr: 13 3 17 4 Jo|hn
Reël: Eerste letter van kodewoord +2
Nuwe S/Nr: 15 5 19 6
Kode Boodsk: WVXL

In 'n verdere inset het ek die leerders daarop gewys om albei reëls vir 'n paar letters te gebruik by die probleem. Aanvanklik het leerders in die groepe elkeen op sy eie probeer werk, maar later het hulle begin gesels en gedagtes uitgeruil oor oplossings vir die probleme. Die leerders was tyd gegun om nou met die probleem te worstel. Sommige het met afparing van die letters begin. Die meerderheid leerders het nie die tweede reël afgelei nie. Ek het weer 'n inset gemaak dat die tweede reël afgelei moes word.

Een van die leerders was gevra om haar werkswyse aan die klas vir die oplos van probleem 1 (die verandering van HN in die boodskap na IZ in die kodewoord) te verduidelik. Sy het as volg verduidelik (sien bylae H):

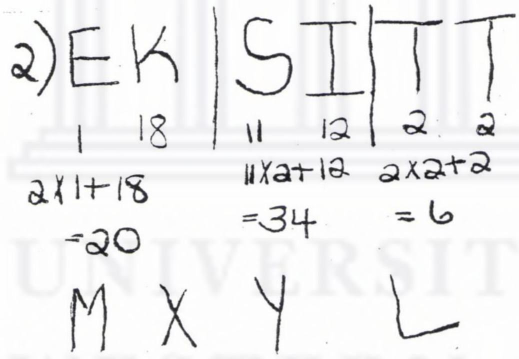
> *"Kyk 2 maal 17 plus 4. En vir Z plus ons 17 en 4 om 21 te kry."*

Die afleiding van die tweede reël was verder verstewig deur Cyril, Abdurahouf en myself deur middel van bespreking in die groepe. Van die leerders se oplossings vir probleem 1, is vervat in bylae G.

Uit bostaande blyk dit dat die probleem wat die leerders met die afleiding van die tweede reël ondervind het, moontlik in onduidelike probleemstelling kon lê. Nêrens word daar genoem van 'n tweede reël wat gebruik moet word nie, vandaar moontlik die probleem met die afleiding van die tweede reël.

5.5.3 Probleme 2 en 3

Alhoewel van die leerders die twee reëls toegepas het, het 'n leerder slegs een reël by probleem 2 gebruik.



Vir probleem 3 wou van die leerders egter by die gegewe kodewoord uitkom soos aangedui op die werkblad. As gevolg daarvan wou hulle van die reëls afwyk en hulle eie reëls saamstel om sodoende die kodewoord op die werkblad te kry. Ek het aan die groep opgemerk dat die kodewoord soos aangedui, nie noodwendig korrek is nie. Met intervensie by die veskillende groepe het Cyril en Abdurahouf dit bevestig deur leerders daarop te wys dat MXYPAI nie noodwendig die korrekte kodeboodskap is nie en dat die reëls deurgaans dieselfde bly. Oplossings vir probleme 2 en 3 word vervat in bylae G.

5.5.4 Probleem 4

Met hierdie probleem wat ten grondslag van die hele studie lê, het dit aanvanklik maar broekskeur gegaan. By verskeie geleenthede is die leerders daarop gewys dat hulle van die gegewe reëls soos neergelê in probleem 1, gebruik moes maak om die ontsyfering te doen.

Later het Cyril die inset gemaak oor die kodewoord NX (woord SY) wat saamgestel was aan die hand van die twee reëls. Die verkorte dekoderingsprobleem het tot heftige besprekings in die verskillende groepe gelei en 'n oor en weer beweging van een groep na 'n ander het geblyk 'n chaotiese situasie tot gevolg te hê - maar in die stadium het sinvolle bespreking en debattering plaasgevind.

Aanvanklik het die leerders die twee reëls direk toegepas soos in probleme 2 en 3.

4

10 7 | 13 2 | 4 3 | 4 26 | 7 22 8 7 17 14

27 17 | 28 15 | 11 7 | 54 40 | 14

Ander het weer die bepaling van die kode as die inverse proses beskou en as volg geredeneer:

> *Volg nou die teenoorgestelde proses. Omgekeerde van + 2 (+ Tweede letter in reël 1 was nou aangesien as +2), moet nou 2 aftrek. Maal met 2 word nou gedeel deur twee. Dit was nou toegepas op 10 en 7 wat die waardes vir R en A voorstel.*
>
> *10 - 2 = 8*
>
> *8÷2 = 4 = N = Eerste letter in boodskap*
>
> *7 - 4 = 3 = O = Tweede letter in boodskap*

Leerders het die volgende oplossingsstrategieë vir probleem 4 ontwikkel:

- skatting en substitusie;
- gebruik van veranderlikes;
- terugwerking; en
- gebruik van spiraal.

Hierdie wyses van oplossingsstrategieë vloei uit die leerders se oplossings.

5.5.4.1 Skatting en substitusie

Die metode van skatting en substitusie behels die skatting van waardes vir die eerste en tweede letters van die boodskap wat aan die hand van die gegewe reëls en waardes vir die eerste twee letters van die kodewoord saamgestel is. Deur substitusie is daar dan bepaal of die twee waardes die syferwaardes van die kodewoord bevredig. Van die leerders het die eerste twee syferwaardes van die letters van die kodewoord deur skatting bepaal en deur substitusie getoets of dit vir albei gevalle geldig was. Dit was veral gebruik waar die twee getalle nie so groot was nie, byvoorbeeld by die paar RA (10 en 7) en NO (4 en 3).

RA	JT	NO	DQ	AV	XF	YA
=10 7	=13 28	=4 3	=14 26	=7 31	=19 22	=8 33
=3 4	=	=1 2				
=O N	=	=E T				

5.5.4.2 Gebruik van veranderlikes

Die metode vir gebruik van veranderlikes is op besluit waar leerders letters of enige ander vorm gebruik het om die onbekende eerste en tweede letters van die boodskap aan te dui. Die waardes vir die eerste en tweede letters was nou deur substitusie verkry. Hierdie substitusie was net vir RA (10 en 7) gedoen.

$$\begin{array}{ll|l} 10 & 7 & 2\times \overset{3}{a} + \overset{4}{b} = 10 \\ & & \overset{3}{a} + \overset{4}{b} = 7 \\ 13 & 2 & 2\times c + d = 13 \\ & & c + d = 2 \end{array}$$

5.5.4.3 Terugwerking

Die metode van terugwerking kom daarop neer dat daar na voorafgaande probleme verwys is en dan teruggewerk is vanaf die twee letters van die kodewoord om dan vas te stel hoe die eerste twee letters van die boodskap vanuit die gegewe twee reëls saamgestel is. Polya (1973) onderskryf die metode van terugwerking as een van die wyses om 'n probleem op te los en beskryf dit as volg met die vrae:

> *Do you know a related problem?*
>
> *Here is a problem related to yours and solved before.*
>
> *Could you use it?*
>
> (Polya, 1973:9)

Leerders het probleem 4 netso gelaat om na hul oplossing vir probleem 3 te kyk - in die oplossing vir probleem 4 verwys 'n leerder as volg hierna:

> *Ons het na nommer 3 gekyk.*

Probleem 3 toon 'n verwantskap met probleem 4 deurdat dit met dieselfde twee reëls saamgestel is.

In die oplossing vir probleem 4 is syferwaardes vir die letters van die kodewoord gebruik en teruggewerk na die syferwaardes van die letters vir die boodskap. Die werkswyse was nou deurlopend toegepas op die pare letters van die kodeboodskap in probleem 4. Negatiewe waardes is vanaf die spiraal afgelees (sien 5.5.4.4).

2 X 1ste letter + 2de letter
1ste letter + 2 de letter

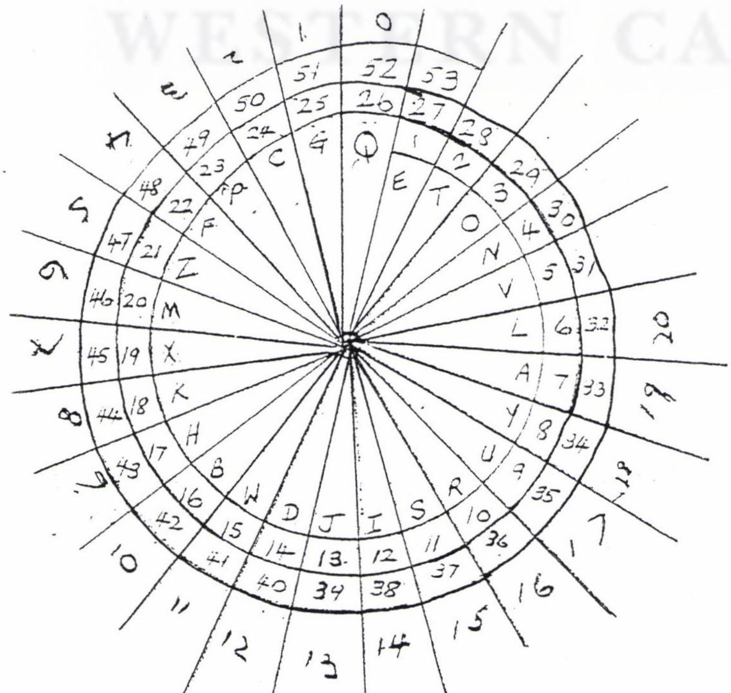
Ons het na nommer 3 gekyk

Toe minus ons 31 - 17 = 14
En 17 - 14 = 3
So het ons aangegaan

4 10 7 / 13 2 / 4 3 / 14 26 / 7, 5 / 19, 22 / 8, 7 / 17 14
3 4 / 11 -9 / 1 2 / -12 38 / 2 3 / -3, 25 / 1 6 / -3 11
O N / S H / E T / D I / T O / P G / E L / O S

5.5.4.4 Gebruik van spiraal

In dié oplossingsstrategie was die waardes van die letters van die kode deur aftrekking bepaal en was die negatiewe waardes op die spiraal aangedui en die ooreenstemmende letters daarvolgens bepaal. Die waardes is anti-kloksgewys op die spiraal aangedui.



ALFABET SPIRAAL

Die verspreiding oor die groepe van die vier oplossingstrategieë was as volg:

STRATEGIEë	1	2	3	4
AANTAL GROEPE	2	2	1	1

Tabel 3

Sleutel vir strategieë: 1 - Skatting en substitusie; 2 - Veranderlikes; 3 - Terugwerking; 4 - Spiraal

5.6 REFLEKSIE OOR EERSTE FASE

Na afloop van die eerste fase is dit belangrik om te reflekteer oor die eerste fase in die geheel en om dan ook te verwys na die positiewe- en negatiewe aspekte wat na vore gekom het in die fase.

Die leerders het die werksessie vir die implementering van die werkblad interessant gevind. Dit word toegeskryf aan die konteks van die probleme en dat hulle met die inhoud kon vereenselwig. Waar hulle aanvanklik traag was om insette te lewer, het dit met verloop van die werksessie verbeter. Die aard van die konteks was veral konfronterend in die sin dat hulle by gestelde probleme betrokke geraak het om na oplossings te soek.

Die vrye produksies (bylae G) waarmee leerders vorendag gekom het, het veral opgeval. Baie van die produkies was die gevolg van insette van leerders in die groepe wat deur vraagstelling die geleentheid aan medeleerders gebied het om uiting te gee aan hul skeppende drang en wat verkonkretiseer is in hul wiskundige konstruksies en denkwyses. Hierdeur is daar geleenthede geskep tot interpersoonlike en interaktiewe situasies wat tot koöperatiewe leersituasies ontwikkel het.

Die ontwikkeling van die lesmateriaal het baie tyd in beslag geneem, aangesien daar gepoog is om so ver as moontlik kontekste van die leerders aan te spreek. In terme van tyd het ek ongeveer 15 uur spandeer in die ontwikkeling van die werkblaaie (bylae A en B). Die tyd ten opsigte van deliberasies met Cyril oor die werkblaaie is hierby uitgesluit.

Die aktiwiteite van die klaskamereksperiment wat binne groepverband afgehandel was, het later na 'n deurmekaar spul gelyk, maar het in die groepe aanleiding tot interessante leersituasies gebied.

Met die oog op die verdere ontwikkeling van lesmateriaal vir 'n tweede fase is dit gerade om te besin oor die positiewe- en negatiewe aspekte van die eerste fase. Die positiewe aspekte kan as volg saamgevat word:

- uit hoofde van die konteks van die inhoudelike het die leerders die werk interessant gevind;
- die inhoud van die leermateriaal met konteks as vertrekpunt het die leerders 'n aanknopingspunt gebied om oplossingsstrategieë te ontwikkel;

- die werkswyse in die aanbieding skep 'n gemoedelike atmosfeer waarbinne die leerders kon werk;
- aktiwiteite was binne die verwysingsraamwerk van die leerders; en
- die verskillende oplossingsstrategieë waarmee leerders vorendag gekom het.

Die eerste fase het dan ook sekere negatiewe aspekte uitgewys:

- leerders het probleme ondervind met die probleemstelling;
- onduidelike probleemstelling en die verduideliking in die inleiding kan aandag geniet;
- leerders wil bevestiging hê dat hul werkwyse korrek is. Dit het veral na vore gekom by probleem 2; en
- daar was min probleme oor dekodering (probleem 4, bylae B) in die werkblad;

Hierdie positiewe aspekte en die leemtes soos uitgestippel hierbo, is aan Cyril Julie voorgehou en met hom bespreek. Na afloop hiervan is daar in detail besin oor die leermateriaal vir die tweede fase van die studie. Die ontwerp, veranderinge, implementering en evaluering van die tweede fase word in die volgende hoofstuk bespreek.

HOOFSTUK 6: IMPLEMENTERING: TWEEDE FASE

Na afloop van die eerste fase op 15 Mei 1996 is daar op 28 Mei 1996 met Cyril Julie vergader om die verloop van die tweede fase te bespreek. Gedurende die gesprek het ek 'n werkblad (bylae I) aan hom voorgelê. Die ontwerp van die werkblad vir die tweede fase het deur drie stadia (bylae I, J en K) gegaan en die werkblad (bylae K) is in die implementering van die tweede fase gebruik. Vervolgens volg 'n bespreking van die wysigings en toevoegings wat die werkblaaie deurgegaan het.

6.1 WYSIGINGS EN TOEVOEGINGS

Die werkblad wat ek aan Cyril voorgelê het, het bestaan uit twee werkblaaie. Daar is ooreengekom dat die inleiding van die lesaanbieding (bylae D), deel van die werkblad moes uitmaak. Die inleiding van die werkblad (bylae I) het as volg verander vir die nuwe werkblad (bylae J):

Bylae I:

*Die woord **DRUIP** sal die syferkode **14 10 9 12 23** hê. Daar word 'n spasie tussen opeenvolgende syferwaardes gelaat.*

*Geheime boodskappe word geskryf deur van die **ALFABET SPIRAAL** gebruik te maak. Om geheimhouding te verseker word reëls neergelê vir die skryf van 'n boodskap in 'n geheime kode.*

Bylae J:

Geheime boodskappe is oor die eeue heen gebruik. Julius Caesar, die Romeinse keiser het van kodes gebruik gemaak om boodskappe aan sy generaals op die slagveld te stuur. In die Tweede Wêreld Oorlog het die Amerikaners Japanse boodskappe onderskep en ontsyfer. Dit het hulle in staat gestel om die Japanse vloot te vernietig.

Syferwaardes word aan die letters van die alfabet toegeken. 'n Woord word omskep in syferwaardes. Met behulp van 'n reël word die syferwaardes verander in nuwe syferwaardes. Vir die nuwe syferwaarde word die ooreenstemmende letter neergeskryf. Dié letters vorm dan die kodewoord.

Die volgende aspek wat aangespreek was, is die vraagstelling ten opsigte van probleem 1. In die verloop van die verskillende ontwerpte werkblaaie het die vraag as volg verander vir die verandering van die boodskap **JOHN** na die kodewoord **OBIZ**:

Bylae B:

Paar die letters van die boodskap in pare van 2 af. As die boodskap uit 'n onewe aantal letters bestaan, word die laaste letter in die boodskap herhaal om dit ewe te maak. Elke paar letters van die boodskap word gebruik om 2 letters van die kodewoord te bepaal. Die eerste letter van die kodewoord is volgens die volgende reël bepaal:

Eerste letter van kodewoord = 2maal(Eerste letter van eerste paar in boodskap) + Tweede letter van eerste paar in boodskap.

Bepaal nou die reël vir die Tweede letter in die kodewoord.

Bylae I:

Maak gebruik van die eerste twee letters van die boodskap hierbo en gebruik die eerste reël om te toets of ***O*** *die eerste letter van die kodewoord moet wees. Gebruik nou dieselfde twee letters om die reël vir die Tweede letter in die kodewoord te bepaal. Toets of die twee reëls ook lei na die letters* ***I*** *en* ***Z*** *in die kodewoord.*

Bylae J:

1.1 Gebruik die eerste reël en verduidelik hoe ***J*** *na* ***O*** *en* ***H*** *na* ***I*** *verander het.*

1.2 ***O*** *het verander na* ***B*** *en* ***N*** *na* ***Z****. Bepaal die reël wat die verandering moontlik gemaak het.*

Bylae K:

1.1 Gebruik die eerste reël en bevestig dat ***J*** *in* ***JOHN*** *na* ***O*** *in* ***OBIZ*** *verander. Toets ook of hierdie reël vir* ***H*** *in* ***JOHN*** *na* ***I*** *in* ***OBIZ*** *verander.*

1.2 ***O*** *in* ***JOHN*** *is verander na* ***B*** *in* ***OBIZ****. Bepaal hierdie reël. Verander jou reël ook vir* ***N*** *in* ***JOHN*** *na* ***Z*** *in* ***OBIZ****?*

Probleem 2 in fase 1 wat ten doel gehad het die vestiging van die twee reëls in probleem 1, is verander en die korrekte kodeboodskap MXYPLN (in plaas van MXYPAI) is vir die boodskap EK SIT gegee:

Bylae I:

*Gebruik die reëls in 1 om vas te stel of **MXYPAI** die kodewoord vir **EK SIT** is.*

Bylae J/K:

*Gebruik die twee reëls in 1 om vas te stel of **MXYPLN** die kodewoord vir die boodskap **EK SIT** is.*

Waar daar in die eerste fase slegs een probleem oor dekodering was, is daar vier probleme daaroor in die tweede fase ingesluit:

Eerste fase (bylae B):

*Ontsyfer die volgende kodewoord: **RAJTNODQAVXFYAHD***

Tweede fase (bylae K):

4. ***WS** is die kodewoord vir 'n woord wat met die twee reëls afgelei is. Vind die woord.*
5. *Ontsyfer die kodeboodskap: **RATHJL***
6. *Boodskap* — *Kodeboodskap*

Boodskap	*Kodeboodskap*
???????????????	*RAJTNODQAVXFYAHD*

7. *Vir die probleem bly die prosedure oor afparing en die onewe aantal letters dieselfde. Ontsyfer nou die kodeboodskap* **MYDLAV** *aan die hand van die volgende twee reëls:*

Eerste letter in kode = 3maal (Eerste letter van 'n paar in boodskap) + 2maal Tweede letter van 'n paar in boodskap

Tweede letter in kode = Eerste letter van 'n paar in boodskap + 2maal (Tweede letter van 'n paar in boodskap)

Die aktiwiteite van die tweede fase, met die hersiene werkblad (bylae K), lesaanbieding (bylae L) en onderwysersgids (bylae M) kan as volg met dié van die eerste fase vergelyk word:

	WERKBLAD			ONDER WYSERGIDS	LESAAN BIEDING
	GETAL	PROBLEME			
		KODERING	DEKODERING		
EERSTE FASE	1	3	1	1	1
TWEEDE FASE	1	3	4	1	1

Tabel 4

Vervolgens word daar na die implementering van die tweede fase gekyk.

6.2 IMPLEMENTERING

Vir die implementering van die tweede fase is daar weer eens nou saam met Abdurahouf gewerk. Dié fase is in 'n tweede standerd 6-klas (graad 8) aan Weltevrede Sekondêr op 12 Junie 1996 geïmplementeer - dit het geskied na afloop van die Junie eksamen. Die klas bestaan uit 30 leerders met 'n gemiddelde ouderdom van 14 jaar. Met die implementering van die tweede fase was daar 23 leerders teenwoordig. Die werkblad is oor een werksessie van 3 uur aangebied. Cyril en Abdurahouf het as waarnemers opgetree. Die leerders het weer in groepe gewerk en elkeen het 'n werkblad, potlood en papier ontvang. Die groepsamestelling was as volg:

	GROEP				
	1	2	3	4	5
SEUNS	3	3	3	3	3
DOGTERS	1	1	2	2	2
TOTAAL	4	4	5	5	5

Tabel 5

Vervolgens geskied 'n opsomming van die analise van die tweede fase. Hierdie analise geskied weer in probleemverband.

6.3 PROBLEEM 1

Leerders is vooraf gevra om deur die werkblad te lees alvorens daar met die uitwerk van die probleme begin word. Die meerderheid van hulle het direk na 1.1 gegaan om dit op te los sonder om hulle eers te vergewis van die opsomming wat die probleem voorafgegaan het. Na afloop van insette van my en die waarnemers, het die leerders deur die opsomming gelees. Hierdie insette het beklemtoon dat die gedeelte wat die probleem vooraf gegaan het, belangrik was vir die uitwerk van die probleme wat daarop gevolg het. Cyril en Abdurahouf het hul insette by verskillende groepe gelewer.

Van die leerders wat vooraf deur die opsomming gewerk het, het onmiddellik aan hul oplossings begin werk. Van die oplossings wat deur die leerders ontwikkel is, verskyn hieronder. Veral interessant is die verskillende skryfwyses van die oplossings vir die probleem:

(3) John $\rightarrow$ (13+3) (17 4)

Omkringing van twee syferwaardes vir afparing

$13 \times 2 = 26 + 3 = 29 = O$

$17 \times 2 = 34 + 4 = 38 = I$

Vertikale skryfwyse vir oplossing van 1.1

Afparing van letters met ooreenstemmende syferwaardes

I	O	H	N
13	3	17	4

Horisontale skryfwyse van oplossing

1.1) $13 \times 2 = 26 + 3 = 29 = O$

1.1) $17 \times 2 + 4 = 38 = I$

1.2) $13 + 3 = 16 = B$

$17 + 4 = 21 = Z$

$2(13) + 3 = 29 = O$

$2(17) + 4 = 38 \rightarrow I$

$O \rightarrow 13 + 3 = 16 \rightarrow B$

$n \rightarrow 17 + 4 = 21 \rightarrow Z$

Gebruik van hakies in substitusie

Verder word gewys hoe O en N na B en Z onderskeidelik verander

Uitskryf van die tweede reël in woorde

(3)B16

$13 + 3 = 16$

eerste letter + tweede letter

6.4 PROBLEME 2 EN 3

Die twee probleme is suksesvol deur die leerders gedoen. In een groep het die leerders eers reël 1 vir al die pare in die boodskap toegepas en na afloop daarvan reël 2 vir elke paar.

Toepassing van eerste reël

3 | 143 | 14 | 1412 | 111 | 320

2	2	2	2	2
$\times$ 2	$\times$ 2	$\times$ 2	$\times$ 2	$\times$ 2
28	2	28	2	6
+ 3	+ 4	+ 12	+ 11	+ 20
31	6	40	13	26
V	L	D	J	Q

Toepassing van tweede reël

14+3=17
H

1+4=5 V

14+12=26 Q

1+11=12 I

3+20=23 P

31	17	6	5	40	26	12	13	23	26
V	H	L	V	D	Q	I	J	P	Q

6.5 PROBLEME 4,5 EN 6

Probleme 4, 5 en 6 word saam groepeer aangesien dieselfde twee reëls op al drie probleme van toepassing is. Aan die hand van die oplossings wat deur die leerders ontwikkel is, is daar besluit op die aard van die strategie. Van dieselfde soort oplossings as in die eerste fase is deur die leerders ontwikkel, maar 'n nuwe werkswyse, naamlik eliminasie is geïdentifiseer aan die hand van die leerders se oplossing. Die volgende oplossingsstrategieë is ontwikkel:

- skatting en substitusie;
- gebruik van veranderlikes;
- terugwerking; en
- eliminasie.

6.5.1 Skatting en substitusie

Die meerderheid leerders het met die werkwyse weggespring om die waardes vir die eerste en tweede letters te bepaal. Hulle het egter nie deurlopend volgehou met die oplossingsmetode nie en na ander oplossingsstrategieë gesoek.

6.5.2 Gebruik van veranderlikes

Die metode is wel gebruik, maar leerders het veranderlikes met ( ) en __ aangedui. Hieronder volg 'n uittreksel van probleem 4 waar die veranderlikes op dié wyse aangedui is:

$$\underline{N} \rightarrow 2(4) + \underline{7} = 15 \rightarrow W$$
$$\underline{A} \rightarrow (\underline{4}) + \underline{7} = 11 \rightarrow S$$

Die volledige oplossing van dié probleem, word in die seksie oor eliminasie in 6.5.4 bespreek.

6.5.3 Terugwerking

Net soos in die eerste fase het leerders van die voorafgaande probleem gebruik gemaak om vas te stel hoe die eerste en tweede letters saamgestel is. Waar negatiewe waardes ter sprake gekom het, is dit as volg deur die leerders hanteer:

- aflees van die waarde deur anti-kloksgewys op die spiraal te beweeg;
- besluit dat indien die antwoord negatief gaan wees, om 26 by te tel soos by T in probleem 5
  [2 - 17→28(= 2 + 26) - 17]; en
- aanduiding van negatiewe waardes op spiraal.

Die leerders was konsekwent in hul werkwyse en 'n oplossingsstrategie is deurlopend vir probleme 4 tot 6 toegepas. Van die oplossings vir probleme 4 tot 6 volg nou:

Probleem 4

W S
15 (1) 11 (1)
$\left.\begin{array}{r} 15 \\ -11 \end{array}\right\}(2)$ $\left.\begin{array}{r} 11 \\ -4 \end{array}(6)\right\}(5)$
4 (3) 7 (7)
N (4) A (8)

14
3

143
3/ 17

$\begin{array}{r} 31 \\ -17 \\ \hline 14 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17 \\ -14 \\ \hline 3 \end{array}$

NA

L_{EK} - Eerste letter vir paar in kode

L_{TK} - Tweede letter vir paar in kode

L_{EB} - Eerste letter vir paar in boodskap

L_{TB} - Tweede letter vir paar in boodskap

Twee reëls

$L_{EK} = 2L_{EB} + L_{TB}$

$L_{TK} = L_{EB} + L_{TB}$

$L_{EB} = L_{EK} - L_{TK}$ .... (A)

$L_{TB} = L_{TK} - L_{EB}$ .... (B)

Werkwyse

(1) Toekenning van syferwaardes vanaf spiraal.

(2) Toepassing van (A) deur syferwaardes in (1) te gebruik.

(3) Syferwaarde vir eerste letter van paar vir boodskap.

(4) Toekenning van letter vanaf spiraal.

(5) Toepassing van (B) deur van syferwaarde soos verkry in (3) aangedui in (6) gebruik te maak.

(6) Syferwaarde van eerste letter van boodskap.

(7) Syferwaarde vir tweede letter van boodskap.

(8) Tweede letter van paar verkry vanaf spiraal.

Dieselfde werkswyse as hierbo is nou op probleem 5 toegepas. Ten opsigte van negatiewe waardes, is die metode van bytelling van 26, gevolg.

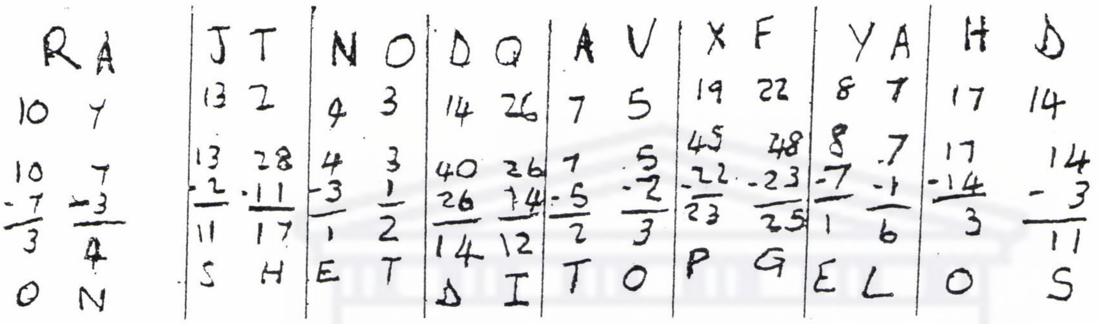
Probleem 5

R	A	T	H	J	L
10	7	-2	17	13	6
10	7	28	17	13	32
-7	-3	-17	-11	-6	-7
3	4	11	6	7	25
O	N	S	L	A	G

T: 2 - 17 → 28(= 2 + 26) - 17
L: 6 - 7 → 32(= 6 +26) - 7

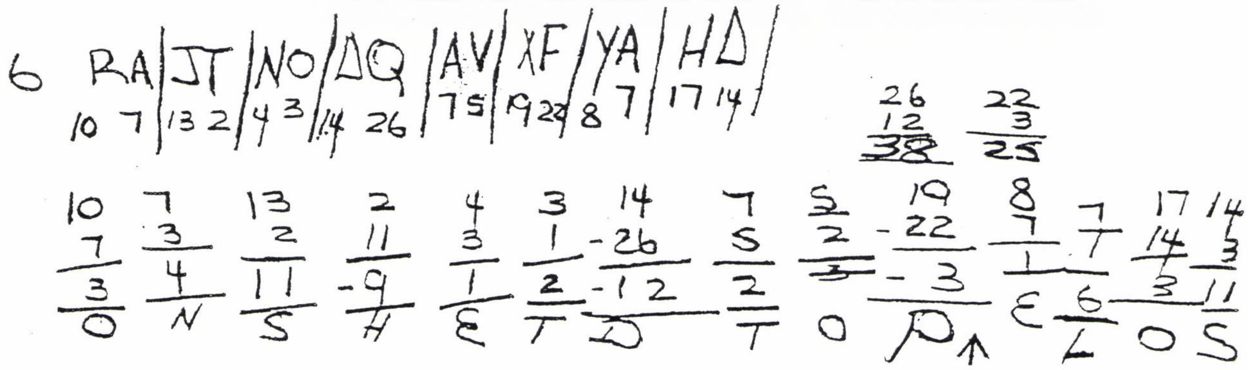
Die oplossingsstrategie wat vir die vorige probleme gevolg is, is ook op probleem 6 toegepas, terwyl die prosedure ten opsigte van die bytelling van 26 herhaal word vir T(2), D(14), X(19) en F (22):

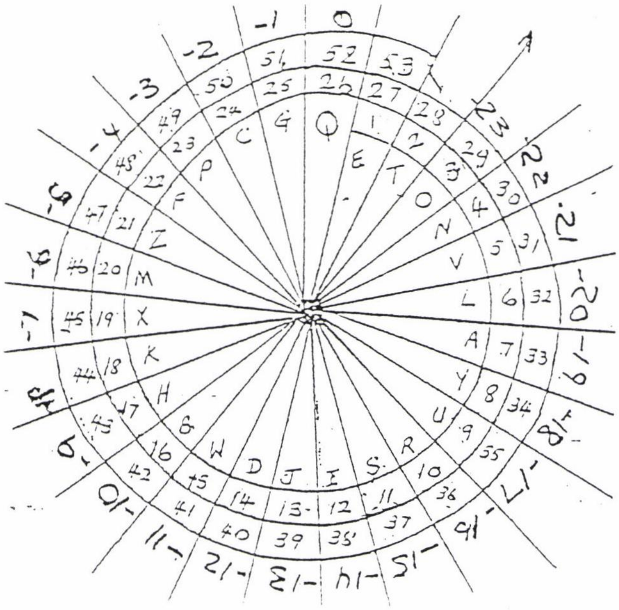
Probleem 6



In 'n ander oplossing vir probleem 6 het die leerder met negatiewe waardes gewerk en is daar nie 'n omskakeling na positiewe waardes met die bytelling van 26 nie. Die negatiewe waardes is dan op die spiraal aangedui.

Probleem 6





Aanduiding van negatiewe waardes op alfabet spiraal.

6.5.4 Eliminasie

In die oplossing vir probleem 5 het die leerders deur die aftrekking van rye van die tweede letter ontslae geraak. Die eerste letter is dan deur substitusie bepaal. Hierna is die tweede letter ook deur substitusie bepaal. Hierdie werkswyse is vir probleme 5 en 6 herhaal. Vir dié probleme is die spiraal benut, deur waar nodig, waardes te vervang deur elke keer 26 by te tel. Dit is gedoen om nie met negatiewe waardes op die alfabet spiraal te werk nie. Hieronder volg die volledige oplossings vir die drie probleme:

Probleem 4

$\underline{N} \rightarrow 2(4) + 7 = 15 \rightarrow W$

$\underline{A} \rightarrow (4) + 7 = 11 \rightarrow S$

1 eerste Letter = 4 → N (A)

tweede letter = 7 → A (B)

$L_{EB} = L_{EK} - L_{TK}$ .... (A)

$L_{TB} = L_{TK} - L_{EB}$ .... (B)

Hierdie werkswyse, naamlik vergelykings (A) en (B) vir die bepaling van die eerste en tweede letters van die boodskap, stem ooreen met die werkswyse wat in terugwerking vir dieselfde probleem in 6.5.3 gebruik is. Die metode is nou op ook op die volgende twee probleme toegepas:

Probleem 5

R	2(3)	+	4	= 10	→ O
A	(3)	+	4	= 7	→ N
T	2(11)	+	6	= 28	→ S
H	(11)	+	6	= 17	→ L
J	2(7)	+	25	= 13=39	→ A
L	(7)	+	25	= 6=32	G

Bytelling van 26

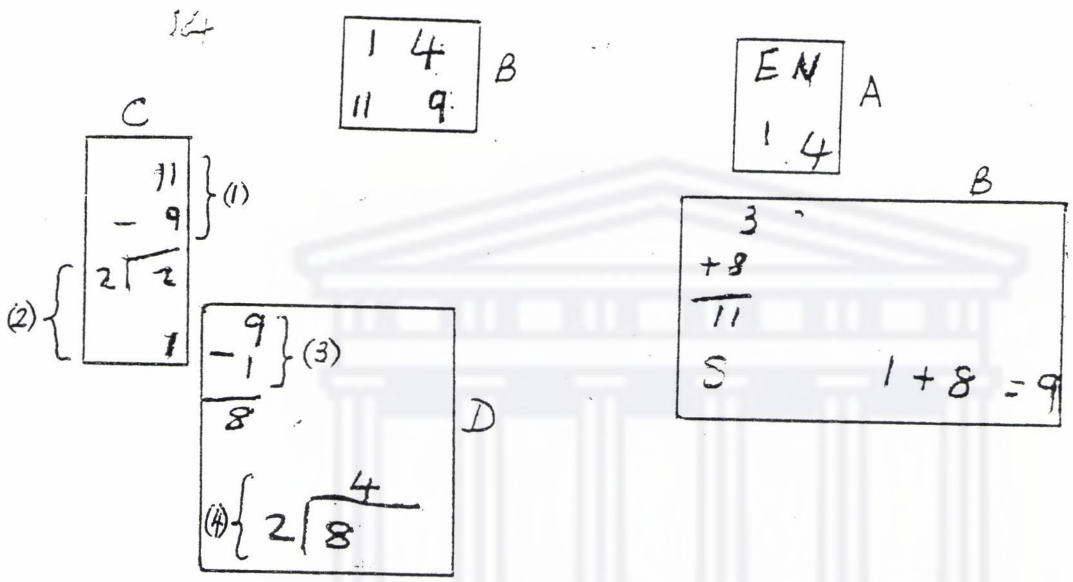
Probleem 6

R	2(3)	+	4	= 10	→ O
A	(3)	+	4	= 7	→ N
J	2(11)	+	17	= 13=39	→ S
I	(11)	+	17	= 2=28	→ H
N	2(1)	+	3	= 4=	→ E
O	(1)	+	2	= 3=	→ T
Q	2(14)	+	12	= 14=40	→ D
Q	(14)	+	12	= 26	→ I
A	2(2)	+	3	= 7	→ T
V	(2)	+	3	= 5	→ O
X	2(23)	+	23	= 19=45	P
E	(23)	+	25	= 22=48	G
Y	2(1)	+	6	= 8	→ E
A	(1)	+	6	= 7	→ L
H	2(3)	+	11	= 17	→ O
D	(3)	+	11	= 14	→ S

Bytelling van 26

6.6 PROBLEEM 7

Vir die oplossing van die probleem het leerders gehou by hul strategie wat in probleme 4-6 gebruik is. Leerders wat die metode van terugwerking gebruik het, het nou hul eie woorde gebruik en aan die hand van die twee reëls die kodewoord daarvoor bepaal. Hierna het hulle teruggewerk om sodoende vas te stel hoe die eerste en tweede letters bepaal is. Leerders in een groep het byvoorbeeld die woord EN gebruik vir die doel. Die werkswyse is vervolgens op probleem 7 toegepas. Hieronder volg die werkswyse:



A: Keuse van woord EN en die toekenning van syferwaardes.

B: Toepassing van die twee reëls van toepassing op probleem 7.

Reëls: $L_{EK} = 3L_{EB} + 2L_{TB}$

$L_{TK} = L_{EB} + 2L_{TB}$

C: Terugwerking vanaf 11 en 9 om 1 te verkry.

(1) $L_{EK} - L_{TK}$

(2) $L_{EB} = ½(L_{EK} - L_{TK})$

D: Terugwerking vanaf 9 en 1 in C om 4 te kry.

(3) $L_{TK} - L_{EB}$

(4) $L_{TB} = ½(L_{TK} - L_{EB})$

Die werkswyse is nou op probleem 7 toegepas:

(7)

M	Y	D	L	A	V
20	8	14	6	7	5
20 − 8 = 12	8 − 6 = 2	14 − 6 = 8	6 − 4 = 2	7 − 5 = 2	5 − 1 = 4
2)12 = 6	2)2 = 1	2)8 = 4	2)2 = 1	2)2 = 1	2)4 = 2
6	1	4	1	1	2
L	E	N	E	E	T

In 'n ander groep het leerders ook by hul vorige oplossingsstrategie, eliminasie, gehou:

M 3(6) + 2(1) = 20 → L
Y (6) + 2(1) = 8 → E
D 3(4) + 2(1) = 14 → N
L (4) + 2(1) = 6 → E
A 3(1) + 2(2) = 7 → E
V (1) + 2(2) = 5 → T

	A	B	C	
2 van die eerste letter	= 12	8	2	(1)
1 van die eerste letter	= 6	4	1	(2)
2 van die tweede letter	= 2	2	4	(3)
1 van die tweede letter	= 1	1	2	(4)

A: Eerste kolom om die waardes vir die eerste twee letters te bepaal.

B: Tweede kolom om die waardes vir die derde en vierde letters te bepaal.

C: Derde kolom om die waardes van die vyfde en sesde letters te bepaal.

$L_{EK} = 3L_{EB} + 2L_{TB}$ .... (a)

$L_{TK} = L_{EB} + 2L_{TB}$ .... (b)

(1) $2L_{EB} = L_{EK} - L_{TK}$ .... (a) - (b)

(2) $L_{EB} = \frac{1}{2}(L_{EK} - L_{TK})$

(3) $2L_{TB} = L_{TK} - L_{EB}$

(4) $L_{TB} = \frac{1}{2}(L_{TK} - L_{EB})$

Hierdie werkswyse wat hierbo in eliminasie gevolg is, toon weer 'n ooreenkoms met die oplossing van terugwerking wat vir dieselfde probleem gevolg is.

Die oplosssings wat vir probleme 4-7 ontwikkel is, kan as volg opgesom word:

STRATEGIEë	1	2	3	4
AANTAL GROEPE	1	1	2	1

Tabel 6

Sleutel vir strategieë: 1 - Skatting en substitusie

2 - Veranderlikes

3 - Terugwerking

4 - Eliminasie

In die tweede fase is daar gepoog om die leemtes van die eerste fase aan te spreek. Met die werkblad is daar veral gepoog om die onduidelike vraagstelling aan te spreek - die feit dat daar drie versies vir die werkblad was, toon die veranderinge wat die werkblad ondergaan het. Die inleiding wat ontbreek het in die werkblad van die eerste fase is ook vervat in die werkblad van die tweede fase. Die kwessie oor meer dekodering probleme (4, 5, 6 en 7), is volledig gedek terwyl die vraagstelling in probleme 1 (1.1 en 1.2) en 2 (korrekte kodewoord) ook aangeraak is. In hoofstuk 7 word daar na aanbevelings en gevolgtrekkings na aanleiding van die studie gekyk.

HOOFSTUK 7: SLOT

> *If we want to teach students to apply mathematics effectively, we must do much more than just put techniques for solving various equations in their heads.*
>
> (Spanier, 1981:22)

In hierdie studie het standerd ses (graad 8) leerders oplossings vir gelyktydige vergelykings ontwikkel. Realistiese Wiskunde Onderrig het as onderbou vir die studie gedien. Daar is spesifiek op die oplos van twee gelyktydige lineêre vergelykings besluit, aangesien vergelykings sentraal staan in verskeie onderwerpe van Algebra (sien 2.2). Waar die REMESA-projek (Realistiese Wiskunde Onderrig in Suid-Afrika) wat in 1993 aan die Universiteit van Wes-Kaapland geloods is, hoofsaaklik op meetkundeonderrig konsentreer, probeer die studie 'n blik gee in die onderrig van 'n Algebra-komponent vanuit 'n Realistiese Wiskunde Onderrigbenadering.

Naas die uitkenning van oplossingstrategieë wat leerders ontwikkel het, vorm die materiaal wat vir die studie ontwikkel is, 'n integrale deel. Die aard en vorm van die inhoudelike van die materiaal blyk moontlikhede vir die onderrig van Wiskunde in te hou.

Tans word daar gewerk aan inisiatiewe en voorstelle om moontlike veranderinge aan die interimsillabusse vir Wiskunde wat in die loop van 1996 in werking getree het, aan te bring. Die studie word gesien as 'n beskeie poging om 'n bydrae tot die debat te maak. Bydraes van die studie tot die debat word hieronder opgesom:

7.1 MATERIAAL

Waar die onderwyser uit hoofde van sy onderrigbenadering hom/haar deur 'n skoolhandboek laat lei, is hy/sy aangewese op probleme en toepassings in die handboek. In die studie verskuif die klem deurdat materiaal vir gebruik in die klaskamer ontwerp is.

In my posisie as ontwikkelaar van die materiaal (navorser) vir die studie, het ek tyd tot my beskikking gehad aangesien ek met studieverlof was. Vir ontwerp van die werkblad (bylae A en B) vir die eerste klaskamereksperiment het ek ongeveer 15 uur nodig gehad - bylae B is in die implementering gebruik. In die tweede klaskamereksperiment het ek ongeveer 20 uur spandeer aan die ontwerp van die werkblad (bylae I, J en K) - bylae K is in die implementering gebruik. Die tyd sluit deliberasies met Cyril oor ontwerpte werkblaaie uit.

In die lig van die huidige opset waar rasionalisasie die onderwys in die gesig staar, en groter klasse en 'n groter werkslading die voorland van die Wiskunde-onderwyser gaan word, sal hy/sy nie tyd tot sy beskikking hê om materiaal te ontwikkel nie. Ek is van mening dat tersiêre instellings navorsers spesifiek vir dié doel moet oplei. Wiskunde-onderwysers kan ook as voltydse navorsers vir die doel ingespan word. Wittmann (1995) waarsku teen die gebruik van onervare persone vir die ontwikkeling van materiaal:

> *The design of substantial teaching units, and particularly of substantial curricula, is a most difficult task that must be carried out by experts in the field.*
>
> (Wittmann, 1995:365)

Huidige Wiskunde-onderwysers het dan ook 'n rol te speel. Hulle kan die ontwerpte materiaal in hul klaskamers gebruik en dan kommentaar oor die behoud/verandering van die materiaal lewer. Hierdie insette van die onderwyser kan dan weer deur die navorser gebruik word vir die (her)ontwerp van verdere materiaal. Die rol van die Wiskunde-onderwyser kan as volg saamgevat word:

> *...teachers can certainly make important contributions within the framework of design provided by experts, particularly when they are members of or in close connection with a research team.*
>
> (Wittmann, 1995:365)

Vir my as ontwikkelaar van die materiaal het ek 'n kykie gekry in hoe materiaal vir Realistiese Wiskunde Onderrig daar moet uitsien. Die sprong van werkblad versie een (bylae A) na werkblad versie twee (bylae B) in die eerste klaskamereksperiment is 'n voorbeeld van persoonlike 'groei' wat ek ervaar het - letterlik 'n denksprong van die tradisionele (handboekgebonde) - na 'n Realistiese Wiskunde Onderriggesentreerde materiaal.

7.2 ONTWIKKELINSONDERSOEK

Hierdie studie het deur twee fases gegaan. Na afloop van die eerste fase is die materiaal verander en in 'n tweede klas geïmplementeer. In die ontwikkelingsondersoek was daar noue samewerking tussen Cyril, Abdurahouf en myself. Al drie van ons het in die studie 'n dubbele rol vervul.

Ek was beide ondersoeker en navorser, Cyril, akademikus en waarnemer en Abdurahouf, onderwyser en waarnemer. Hierdie samewerking is belangrik veral in die lig van die aanbeveling in 7.1 hierbo. Dit blyk dat die ontwikkelingsondersoek met vrug gebruik kan word om ander onderwerpe van Wiskunde op dieselfde wyse as die studie te ondersoek.

7.3 OPLOSSINSSTRATEGIEë

Volgens tabel 1 in hoofstuk 2 word die metodes van eliminasie en substitusie algemeen gebruik in skoolhandboeke. Vanuit eie ondervinding en gesprekke met vakkollegas word die twee metodes oor die algemeen onderrig as metodes vir die oplos van twee gelyktydige lineêre vergelykings.

In die studie het leerders met hul vrye produksies egter self oplossingsstrategieë ontwikkel. Die wyse waarop hulle dit vermag het wys dat leerders geleentheid gebied moet word om op hul eie oplossings te ontwikkel.

7.4 KURRIKULUMVERANDERING

Tans word die oplos van twee gelyktydige lineêre vergelykings in standerd 8 (graad 10) onderrig. Uit hoofde van die belangrike rol wat die oplos van vergelykings en die oplos van gelyktydige vergelykings in algebra speel, wil ek aanbeveel dat die onderrig van die oplos van gelyktydige vergelykings alreeds in standerd 6 (graad 8) in aanvang neem. Die studie bevestig die tendens as daar gekyk word na die oplossings wat leerders ontwikkel het.

Veral belangrik is dat formele oplossingsmetodes nie onderrig word nie, maar dat leerders die geleentheid moet kry om hul eie strategieë te ontwikkel. Daar moet verder in ander standerds op hierdie strategieë gebou word. So kan die oplossingsstrategie, getiteld terugwerking, in standerd sewe as volg vir probleem 4 (bylae K) opgevolg word:

Leerder se oplossing

4

W S

15 11

$$\begin{array}{rr} 15 & 11 \\ -11 & -4 \\ \hline 4 & 7 \end{array}$$

N A

14
3

143
31 17

$$\begin{array}{r} 31 \\ -17 \\ \hline 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ -14 \\ \hline 3 \end{array}$$

NA

Vanaf die leerder se oplossing kan tot die volgende skryfwyse vir dieselfde oplossing beweeg word:

L_{EK} - Eerste letter vir paar in kode

L_{TK} - Tweede letter vir paar in kode

L_{EB} - Eerste letter vir paar in boodskap

L_{TB} - Tweede letter vir paar in boodskap

Twee reëls: $L_{EK} = 2L_{EB} + L_{TB}$

$L_{TK} = L_{EB} + L_{TB}$

$L_{EB} = L_{EK} - L_{TK} = 4 = N$

$L_{TB} = L_{TK} - L_{EB} = 7 = A$

7.5 DERDE FASE

Hierdie studie het net deur twee fases gegaan. In beide klaskamereksperimente is die studie oor drie uur aangebied. Vir elk van die gevalle is daar net een werkblad vir dié implementering saamgestel.

Uit die waarnemingsnotas (bylae P) van Cyril en deliberasies wat met hom daaroor gehou is, word die volgende aanbeveel vir 'n volgende fase:

- Besinning oor die geskiktheid van die werkblad vir enkel periodes van 45-50 minute wat die maksimumlengte van 'n periode in skole is.
- Splitsing van die een werkblad in 3 tot 4 korter werkblaaie.

Indien daar op die splitsing van werkblaaie besluit word, wil ek die volgende ten opsigte van die werkblaaie voorstel:

7.5.1 Werkblad 1

Die volgende aspekte van geheime boodskappe kan hier behandel word:

- inleiding;
- reëlbevestiging; en
- reëlformulering.

Dit is probleme van die aard soos vervat in probleem 1 (bylae K).

7.5.2 Werkblad 2

Vir hierdie werkblad val die klem op:

- kodering;
- ontwikkeling van eie kodeboodskappe met eie reëls; en
- verifiëring van bogenoemde.

Die werkblad kan as tuiswerk gegee word. Probleme 2 en 3 in bylae K kan as gids dien.

7.5.3 Werkblad 3

Ten grondslag van hierdie werkblad lê dekodering, naamlik die bepaling van 'n woord/boodskap vanaf 'n gegewe kodewoord/boodskap wat deur twee bekende reëls saamgestel is - sien probleme 4 tot 7 van bylae K.

7.5.4 Werblad 4

Hierdie werblad word as tuiswerk gegee en handel oor dekodering van kodeboodskappe.

7.6 SLOTOPMERKING

> *When students are forced to develop their own approaches to unsolved problems, they benifit much more than exposure to the mathematics alone.*
>
> (Spanier, 1981:24)

In die lig van die aanhaling bied Realistiese Wiskunde Onderrig ruimte waarbinne die wekroep van Spanier gestalte kan kry. Verder bied die ontwikkeling van materiaal as deel van dié onderrigbenadering 'n uitdaging aan navorsers om betrokke te raak by inisiatiewe wat dié aspek aanspreek. Onderwysers in hul betrokkenheid by die proses lewer dan ook 'n bydrae tot die ontwikkeling van Wiskunde op skoolvlak.

BIBLIOGRAFIE

African National Congress (Education Department) (1994). A Policy Framework For Education and Training. Chapters 13 & 17. Braamfontein.

African National Congress (1994). The Reconstruction and Development Programme. A *policy framework*. ABC book printers.

Anderson, J. (1978). The Mathematics Curriculum: Algebra. Glasgow: Blackie & Son.

Chace, A. B. (1979). The Rhind Mathematical Papyrus. The National Council of Teachers of Mathematics. Virginia: Reston.

Commins, B., Duxbury, D., Makgamathe, S. (1986). Successful Mathematics 8. Cape Town: Oxford University Press.

De Jager, C., Fitton, S., Blake, P. (1984). Net Wiskunde Standerd 8. Kaapstad: Maskew Miller Longman.

De Lange, J. (1987). Mathematics Insight and Meaning. Utrecht: State University of Utrecht.

Dreyer, C.B., Gildenhuys, D.G. (1984). Wiskunde in Aksie St.8. Kaapstad: De Jager-Haum.

Dreyer, J.J., Dreyer, B. (1984). Nuwe Moderne Wiskunde Standerd 8. Kaapstad: Juta en Kie, Bpk.

Du Toit, D.J. et al (1992). Wiskunde aan die werk standerd 8. Kaapstad: Nasou Bpk.

Freire, P. (1985). The Politics of Education. Massachusetts: Bergin & Garvey Publishers, Inc.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach Mathematics so as to be Useful. Educational Studies in Mathematics. Volume 1, No. 1/2, pp. 3-8.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Dodrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dodrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goffree, F. (1993). HF: Working on Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics. Volume 25, Nos. 1-2, pp. 21-49.

Gravemeijer, K., van der Heuvel, M. and Streefland, L. (1990). Context, free Productions, Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education. Utrecht: State University of Utrecht.

Joseph G.G. (1991). The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics. London: Taurus.

Ladewig, W., Potgieter, R., Pretorius, J. (1993). Wiskunde Plus 8. Kaapstad: Oxford University Press.

Laridon, P.E.J.M. et al (1988). Classroom Mathematics Std. 8. Johannesburg: Lexicon Publishers.

Meneeley, M.A. (1981). Decoding Messages. Mathematics Teacher. 74, pp.629-632.

Onderwysbulletin JS 13/84 (1984). Junior Sekondêre Kursus Sillabus: Wiskunde vir standerds 5, 6 en 7. Volume 19. Kaapstad: Departement van Binnelandse Aangeleenthede.

Pells, E.G. (1938). European, Coloured and Native Education in South Africa, 1652-1938. Cape Town: Juta.

Polya, G. (1973). How to solve it. Second Edition. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Scheid, F. (1988). Schaum's outline of Theory and Problems of Numerical Analysis. New York: McGraw-Hill.

Spanier, J. (1981). Solving equations is not solving problems. In Lynn Arthur Steen (Ed.), Mathematics Tomorrow. New York: Springer-Verlag, p. 22.

Streefland, L. (1991). Fractions in Realistic Mathematics Instruction: A paradigm of developmental research. Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1993). Editorial: The Legacy Of Freudenthal. Educational Studies in Mathematics. Volume 25, Nos. 1-2, pp. 1-7.

The New Book of Knowledge (1979). C Volume 3, pp. 369-371. New York: Grolier Incorporated.

Treffers, A. (1987). Three Dimensions - A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: Wiskobas. Dodrecht: Reidel.

Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal: Realistic Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics. Volume 25, Nos. 1-2, pp. 89-108.

Uspensky, J.V. (1948). Theory of Equations. New York: McGraw-Hill.

Van Est, W.T. (1993). Hans Freudenthal (17 September 1905-13 October 1990). Educational Studies in Mathematics. Volume 25, Nos. 1-2, pp. 59-69.

Wes-Kaap Onderwysdepartement (1996). Junior Sekondêre Kursus: Konsepsillabus vir Wiskunde Standerds 5 tot 7. Kaapstad.

Wittmann, E.C.H. (1995). Mathematics Education as a 'design science'. Educational Studies in Mathematics. Volume 29, pp. 355-374.

INHOUDSOPGAWE: BYLAE

IMPLIMENTERINGSFASE

A. WERKBLAD: Versie 1

B. WERKBLAD: Versie 2

C. LESAANBIEDING: Versie 1

D. LESAANBIEDING: Versie 2

E. ONDERWYSERSGIDS

F. OPLOSSINGS VIR WERKBLAD

G. OPLOSSINGSBLAD: LEERDERS SE WERK

H. WAARNEMINGSNOTAS

TWEEDE FASE

I. WERKBLAD: Versie 1

J. WERKBLAD: Versie 2

K. WERKBLAD: Versie 3

L. LESAANBIEDING

M. ONDERWYSERSGIDS

N. OPLOSSINGS VIR WERKBLAD

O. OPLOSSINGSBLAD: LEERDERS SE WERK

P. WAARNEMINGSNOTAS

BYLAE A: WERKBLAD Versie 1

GEHEIME BOODSKAPPE

Geheime boodskappe is in gebruik sedert die mensdom met mekaar begin kommunikeer het. So is byvoorbeeld syferwaardes aan die letters van die alfabet toegeken deur van die syfers 1 tot 26 gebruik te maak. Hieronder volg 'n voorbeeld van 'n korrespondensiestuk:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
7	16	24	14	1	22	25	17	12
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
13	18	6	20	4	3	23	26	10
S	T	U	V	W	X	Y	Z	
11	2	9	5	15	19	8	21	

Die woord DRUIP sal die syferkode 14 10 9 23 hê (daar word 'n spasie tussen opeenvolgende syferwaardes gelaat).

Om 'n boodskap in kode te skryf, word die letters van die oorspronklike boodskap in pare groepeer. Elke paar letters word nou in 'n ander rangskikking verander deur van reëls gebruik te maak. Met behulp van die reël word die syferwaardes van die paar letters van die oorspronklike boodskap verander in 'n nuwe syferwaarde wat dan die letter vir die kodeboodskap voorstel. As die aantal letters in die oorspronklike boodskap onewe is, word die laaste letter in die boodskap herhaal om dit ewe te maak.

1. Waarom is dit belangrik dat 'n boodskap uit 'n ewe aantal letters bestaan?

2. Boodskap — Kodewoord

Boodskap	Kodewoord
JOHN	OBIZ

BYLAE A: WERKBLAD Versie 1

Die eerste letter van die kodewoord is volgens die volgende reël bepaal:

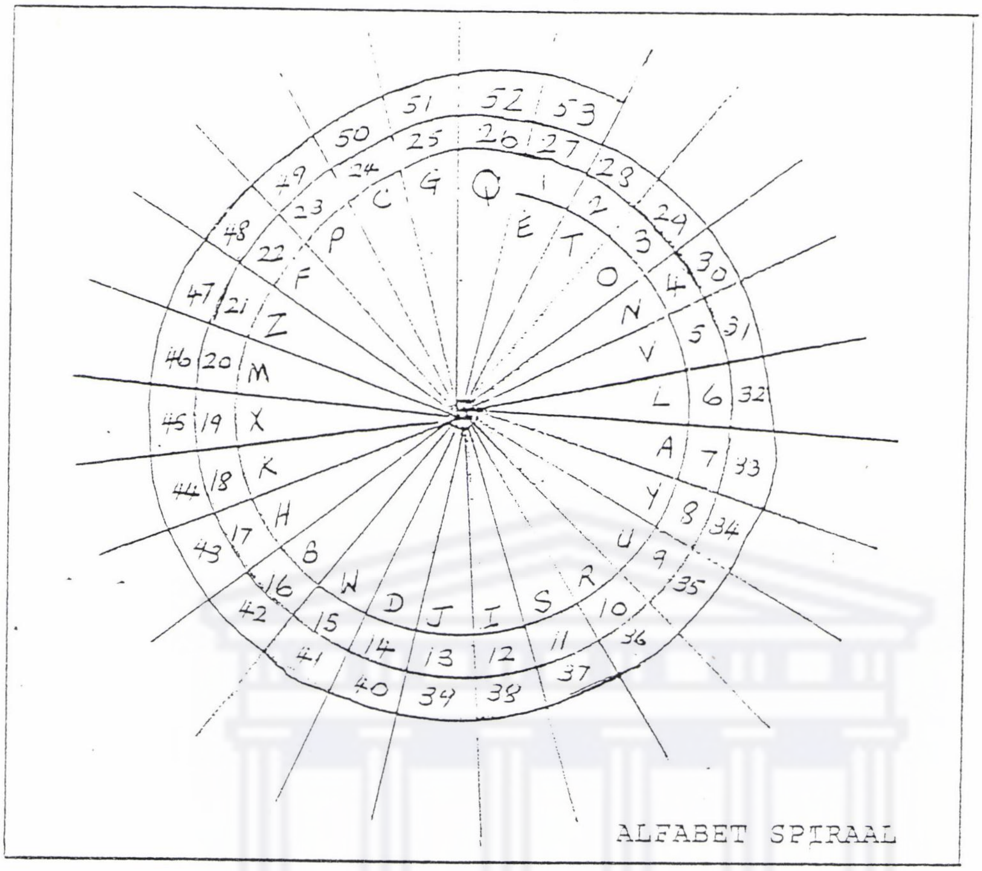
Eerste letter van kodewoord = 2maal(Eerste letter van boodskap) + Tweede letter van boodskap

Bepaal nou die reël vir die tweede letter in die kodewoord. Gebruik die Eerste en Tweede letters van die boodskap.

3. Gebruik die reëls in 2 om te toets of MXYPAI die kodeboodskap vir EK SIT is.
4. Gebruik die reëls in 2 en bepaal die kodeboodskap vir: DOEN DIE SOM
5. Ontsyfer die volgende kodewoord: RAJTNODQAVXFYAHD

BYLAE B: WERKBLAD Versie 2

GEHEIME BOODSKAPPE

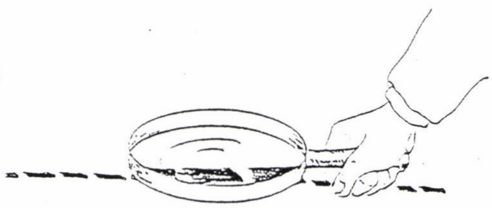


Die woord DRUIP sal die syferkode 14 10 9 12 23 hê. Daar word 'n spasie tussen opeenvolgende syferwaardes gelaat.

Geheime boodskappe word geskryf deur van die ALFABET SPIRAAL gebruik te maak. Om geheimhouding te verseker word reëls neergelê vir die skryf van 'n boodskap in 'n geheime kode.

1. Boodskap — Kodewoord

JOHN — OBIZ



BYLAE B: WERKBLAD Versie 2

Paar die letters van die boodskap in pare van 2 af. As die boodskap uit 'n onewe aantal letters bestaan, word die laaste letter in die boodskap herhaal om dit ewe te maak. Elke paar letters van die boodskap word gebruik om 2 letters van die kodewoord te bepaal. Die eerste letter van die kodewoord is volgens die volgende reël bepaal:

Eerste letter van kodewoord = 2maal(Eerste letter van eerste paar in boodskap) + Tweede letter van eerste paar in boodskap.

Bepaal nou die reël vir die Tweede letter in die kodewoord.

2. Gebruik die reëls in 1 om vas te stel of MXYPAI die kodeboodskap vir die boodskap EK SIT is.

3. Gebruik die reëls in 1 en bepaal die kodeboodskap vir:
DOEN DIE SOM

4. Ontsyfer die volgende kodewoord:
RAJTNODQAVXFYAHD

BYLAE C

LESAANBIEDING: Versie 1

PLEK: Weltevrede Sekondêr

DATUM: 15 Mei 1996

INLEIDING

Geheime boodskappe word oor die eeue heen gebruik as 'n maatreël om inligting te weerhou van ander. So gebruik besighede dit om toe te sien dat ander besighede nie kan sien waarmee hulle besig is of wat hulle besig is om te ontwikkel nie. Daar is oral spioene wat probeer om sulke boodskappe te onderskep om sodoende dit beskikbaar te stel aan instansies wat dit kan gebruik.

Ek het op so 'n boodskap afgekom en wil dit aan julle beskikbaar stel. Ons uiteindelike doelwit met die ontsyfering van die boodskap is om in staat te wees om enige kodeboodskap wat watter aard ookal te ontsyfer. Die werkblad, potlode en uitveërs word hierna uitgehandig. Leerders werk in groepe. Abdurahouf Cassiem en Cyril Julie tree as waarnemers op. Die volgende voorbeeld word as 'n inset gedoen indien nodig:

1. Boodskap DRUIP
2. Syferwaardes vir boodskap **14 10 9 12 23**
3. Reëls vir kodeboodskap **LETTER in boodskap + 2**
4. Nuwe syferwaardes bepaal volgens reël **16 12 11 14 25**
5. Kodeboodskap BISDG

BYLAE D

LESAANBIEDING: Versie 2

PLEK: Weltevrede Sekondêr

DATUM: 15 Mei 1996

INLEIDING

Geheime boodskappe word oor die eeue heen gebruik as 'n maatreël om inligting te weerhou van ander. So gebruik besighede dit om toe te sien dat ander besighede nie kan sien waarmee hulle besig is of wat hulle besig is om te ontwikkel nie. Daar is oral spioene wat probeer om sulke boodskappe te onderskep om sodoende dit beskikbaar te stel aan instansies wat dit kan gebruik.

Ek het op so 'n boodskap afgekom en wil dit aan julle beskikbaar stel. Ons uiteindelike doelwit met die ontsyfering van die boodskap is om in staat te wees om enige kodeboodskap wat watter aard ookal te ontsyfer. Die werkblad, potlode en uitveërs word hierna uitgehandig. Leerders werk in groepe. Abdurahouf Cassiem en Cyril Julie tree as waarnemers op. Die volgende voorbeeld word as 'n inset gedoen indien nodig:

1. Boodskap **DRUIP**
2. Syferwaardes vir boodskap **14 10 9 12 23**
3. Reëls vir kodeboodskap **LETTER in boodskap + 2**
4. Nuwe syferwaardes bepaal volgens reël **16 12 11 14 25**
5. Kodeboodskap **BISDG**

BYLAE E: ONDERWYSERSGIDS

TEIKENGROEP: Graad 8

MATERIAAL*:* Een stel werkblaaie wat aan elke leerder beskikbaar gestel word. Leerders word dan ook van die nodige skryfbehoeftes voorsien, byvoorbeeld potlode, uitveërs, liniale en blaaie om op te werk.

DOELWITTE*:* Leerders kry die geleentheid om geheime boodskappe te ontsyfer deur gegewe algebraïese uitdrukkings te evalueer. Daar is geleentheid om reëls te bepaal vir oorspronklike- en geheime boodskappe.

WERKSWYSE*:* Die ontwerpte werkblaaie word voorgelê aan die onderwyser van die klas betrokke in die fase en na 'n in diepte bespreking oor hoe fase in die vooruitsig gestel word, word daar van hom/haar verwag om deur die werkblaaie te werk en alle kommentaar en haakplekke aan te teken. Na afloop hiervan word daar weer met die onderwyser vergader vir 'n bespreking van die werkblaaie aan die hand van sy/haar oplossings en kommentaar. Sy/haar rol as fasiliteerder in die fase word nou verduidelik en hoe die klasrangskikking vir die aanbied van die fase sal geskied. Daar sal van hom/haar verwag word om te fokus op een groep en dan veldnotas te maak van besprekings wat in die groep plaasvind in die bepaling van hul oplossings. Die werkblaaie word uitgedeel aan die leerders wat in groepe verdeel is. Daar word 'n kort oorsig gegee van geheime boodskappe. Die voorbeeld oor DRUIP word as 'n inset gebruik in die verloop van les - sien lesaanbieding (bylae D).

BYLAE F: OPLOSSINGS VIR WERKBLAD

L_{EK} - Eerste letter vir paar in kode

L_{TK} - Tweede letter vir paar in kode

L_{EB} - Eerste letter vir paar in boodskap

L_{TB} - Tweede letter vir paar in boodskap

1. JO/HN/

   13 3/ 17 4/

   $L_{EK} = 2x13 + 3 = 29 = O$

   $L_{TK} = B = 16 = 13 + 3 = L_{EB} + L_{TB}$

   $I = 12 = 2x17 + 4 = 38$

   $Z = 21 = 17 + 4$

2. EK/SI/TT/

   1 18/11 12/2 2/

   $L_{EK} = 2x1 + 18 = 20 = M$

   $L_{TK} = 1 + 18 = 19 = X$

   $L_{EK} = 2x11 + 12 = 34 = Y$

   $L_{TK} = 11 + 12 = 23 = P$

   $L_{EK} = 2x2 + 2 = 6 = L$

   $L_{TK} = 2 + 2 = 4 = N$

   Kodewoord **MXYPLN**

3. DO/EN/DI/ES/OM/

   14 3/1 4/14 12/1 11/3 20/

   $L_{EK} = 2x14 + 3 = 31 = V$

   $L_{TK} = 14 + 3 = 17 = H$

   $L_{EK} = 2x1 + 4 = 6 = L$

   $L_{TK} = 1 + 4 = 5 = V$

   $L_{EK} = 2x14 + 12 = 40 = D$

BYLAE F: OPLOSSINGS VIR WERKBLAD

$L_{TK} = 14 + 12 = 26 = Q$

$L_{EK} = 2x1 + 11 = 13 = J$

$L_{TK} = 1 + 11 = 12 = I$

$L_{EK} = 2x3 + 20 = 26 = Q$

$L_{TK} = 3 + 20 = 23 = P$

Kodeboodskap **VHLVDQJIQP**

4. RA/JT/NO/DQ/AV/XF/YA/HD/

10 7/13 2/4 3/14 26/7 5/19 22/8 7/17 14/

Reëls: $L_{EK} = 2L_{EB} + L_{TB}$

$L_{TK} = L_{EB} + L_{TB}$

$L_{EB} = L_{EK} - L_{TK}$

$L_{TB} = L_{TK} - L_{EB}$

/10 7/ $L_{EB} = 3 = O$ en $L_{TB} = 4 = N$

/13 2/ $L_{EB} = 11 = S$ en $L_{TB} = 17 = H$

/4 3/ $L_{EB} = 1 = E$ en $L_{TB} = 2 = T$

/14 26/ $L_{EB} = 14 = D$ en $L_{TB} = 12 = I$

/7 5/ $L_{EB} = 2 = T$ en $L_{TB} = 3 = O$

/19 22/ $L_{EB} = 23 = P$ en $L_{TB} = 25 = G$

/8 7/ $L_{EB} = 1 = E$ en $L_{TB} = 6 = L$

/17 14/ $L_{EB} = 3 = O$ en $L_{TB} = 11 = S$

Kodeboodskap: **ONS HET DIT OPGELOS**

No 1

Boodskap : John

J O / H N

J O / H N
13 3 / 17 14

Reël 1 → 2 × □ + □ = □

2 × 13 + 3 = 29 → O

Reël 2 → 13 + 3 = 16 → B

Herhaal reël 1

2 × 17 + 4 → 38 → I

Herhaal reël 2
17 + 4 = 21 → Z

KODEWOORD → O B I Z

1 Boodskap: Jo/hn
Syferwaarde: 13 3/17 4
Reël: Die eerste twee letters plus en saam om die tweede getal te kry
Nuwe S/4: 29 16 38 21
Kodewoordskap: O B I Z

Afleiding van tweede reël

Boodskap	:	J O	H N
Syferwaarde	:	13 3	17 4
Reël	:	13 × 2 + 3 = 29 = O	/ 17 × 2 + 4 = 38 = I
Reël	:	13 + 3 = 16 = B	/ 17 + 4 = 21 = Z

Kodewoord: O B I Z

Probleme 2 en 3

Boodskap: EK SI TT

Syferwaarde: 1 18 11 12 2 2

Reël : Eerste letter x2 + tweede letter = 1x2+18=20 = M

Reël : Eerste letter + tweede letter = 18+1=19 = X

1 x2 + 18 = 20 = M

18 + 1 = 19 = X

11 x2 + 12 = 34 = Y

11 + 12 = 23 = P

2x2 + 2 = 6 = L

2+2=4 = N

Kodewoord : MXYPLN

3) DO EN DI ES OM

14 3 1 4 14 12 1 11 3 20

Reel ① Eerste letter x2 + tweede letter

② Tel 2 getalle saam om nuwe letter te kry

14 x 2 + 3 = 31 = V

14 + 3 = 17 = H

1 x 2 + 4 = 6 = L

1 + 4 = 5 = V

14 x 2 + 12 = 40 = D

14 + 12 = 26 = Q

1 x 2 + 11 = 13 = J

1 + 11 = 12 = I

3 x 2 + 20 = 26 = Q

3 + 20 = 23 = P

Kodeboodskap = VHLVDQJIQP

BYLAE G

Probleem 4

1. Skatting van Eerste en Tweede letters
2. Substitusie

1

Kode woord.

RAJTNODQAVXFYAHD

RA	JT	NO	DQ	AV	XF	YA
=10 7	=13, 28	=4 3	=14 26	=7 31	=19 22	=8 33
3 4	=	=1 2				
O N		=E T				

Gebruik van letters om Eerste en Tweede letters aan te dui

10 7 | $2 \times \overset{3}{a} + \overset{4}{b} = 10$

$\overset{3}{a} + \overset{4}{b} = 7$

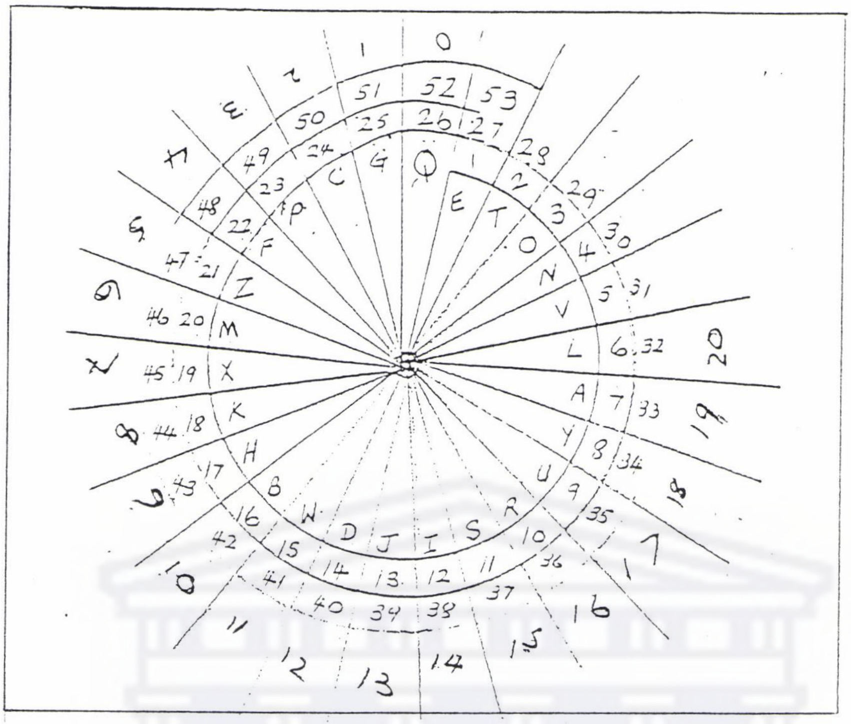
---

13 2 | $2 \times c + d = 13$

$c + d = 2$

BYLAE G

Aanduiding van negatiewe waardes op ALFABET SPIRAAL



2 X 1ste letter + 2de letter

1ste letter + 2 de letter

Ons het na nommer 3 gekyk

Probleem 4

Toe minus ons 31 - 17 = 14

En 17 - 14 = 3

So het ons aangegaan

4 10 7 / 13 2 / 4 3 / 14 26 / 7,5 / 19, 22 / 8, 7 / 17 4

3 4 / 11 -9 / 1 2 / -12 38 / 2 3 / -3, 25 / 1 6 / 3 11

O N / S H E T / D I T O P G E L O S

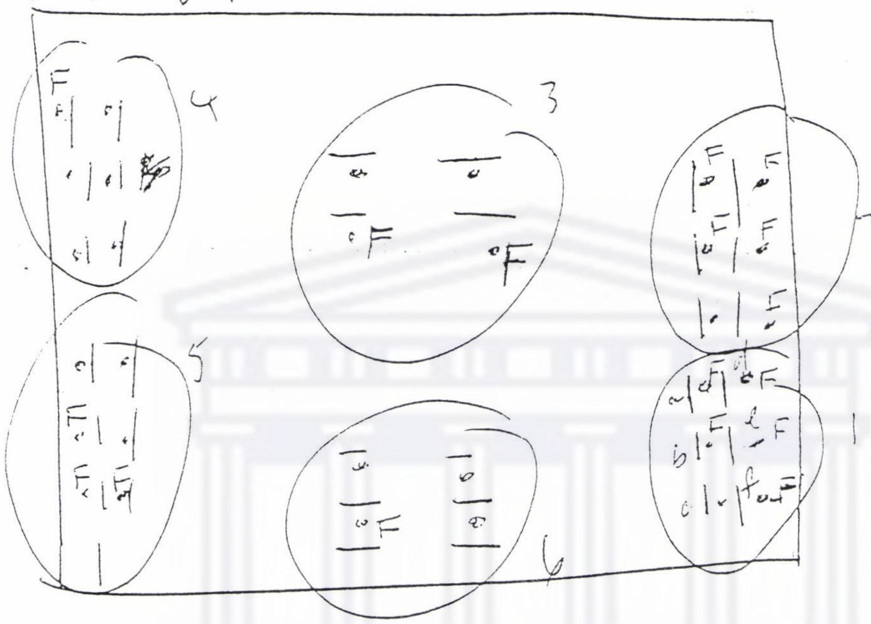
BYLAE H

15/05/1996

Kalvin Whittles (KW)

Weltevrede Senior Sekondêre Skool

Standerd 4



- ~~Inle~~ Inleiding soos in par. 1 van van lesvoorbereiding
- Voorafbesprekings het ~~gesê~~ gesien dat KW nie die tweede paar klassikaal behandel nie. (Liefs as bydrae) Werskaf nadat leerlinge na die werk gespring.
- Werkblaaie was uitgedeel. Leerlinge het individueel ~~die~~ deurgelees. Sommige het hulle ~~nuwe~~ met mekaar begin gesels. Nadat potlode uitgedeel was, was leerlinge

BYLAE H

maar spoedig net melaas begin gesels, (dit het weer oor ~~taal~~ die potlode en dies meer gegaan). Later was daar weer stilte en leerlinge was diep aan die werk.

~~KW~~ Leerlinge het met 2 begin, KW se afleiding dat hulle 1 nie as "probleem" beskou nie. ~~KW~~ G

~~KW se~~ (~~GJ~~ en Leerling het MXPPAI direk gaan geheim as 20 - -

KW verwys na DRUIP en verduidelik hoe transformasie gemaak word na geheim met 'n reël.

SKRYFBORDTABEL

1	Boodskap:	D	R	U	I	P
2	Syferwaarde:	14	10	9	12	23
3	Reël:	Letter in boodskap + 2				
4	Nuwe Syferwaarde:	16	12	11	14	25
5	Kodeboodskap:	B	I	S	D	G

4 was klassikaal deur leerlinge gegee. - - -

BYLAE H

- Leerlinge was aangemoedig om ƒ te doen.
- Leerlinge het die tabel ~~...~~ nageboots en probeer om JOHN met dieselfde reël (letter +2) te kodeer
- ~~Ondervraging~~ KW verduidelik aan leerlinge dat ~~...~~ vir 1 was dieselfde reël nie gebruik nie.
- Leerlinge was tyd gegun om te worstel. Sommige het begin met afparing.
- Sommige leerlinge het by paring gekom. Die oorgrote meerderheid het nie die tweede reël bepaal.
- KW verduidelik weer hoe JOHN na OBIZ vertaal was. Klem word gelê op die verhoging gee van eerste reël en dat leerlinge die tweede reël moet kry

BYLAE H

- Leerling verduidelik hoe sy die 2de letter van die paar gebruik het. Hier die woord gekonsolideer deur KW, CJ & OFIE.

- Leerling versterk die reëls deur aan mekaar te ~~rek~~ verduidelik. Leerlinge in ~~groepe~~ groep ~~?~~. ~~..~~ verduidelik hoe H na I oor Z verander het as volg:

  "Kyk ~~2×17~~ 2 maal 17 plus 4. en wat ~~tot~~ plus ons 17 en 4 om 21 te kry"

- ~~Die~~ Leerlinge doen 2. ~~Daar is steeds~~

  Alhoewel sommige die twee reëls gebruik word, is daar steeds die leerlinge slegs een reël gebruik. Al die ~~probleem~~ was onderliggend deurdat leerlinge ~~self~~ deur "waarnemers" se indeling by groepe

BYLAE H

- Leerlinge het 2 en 3 voltooi en begin-waarstel met 4. ~~leerlinge~~.
- Leerlinge het letters, waardes toegeken en direk vertaal.

S Y | 2×11 + 8 = 30
11 8 | 19

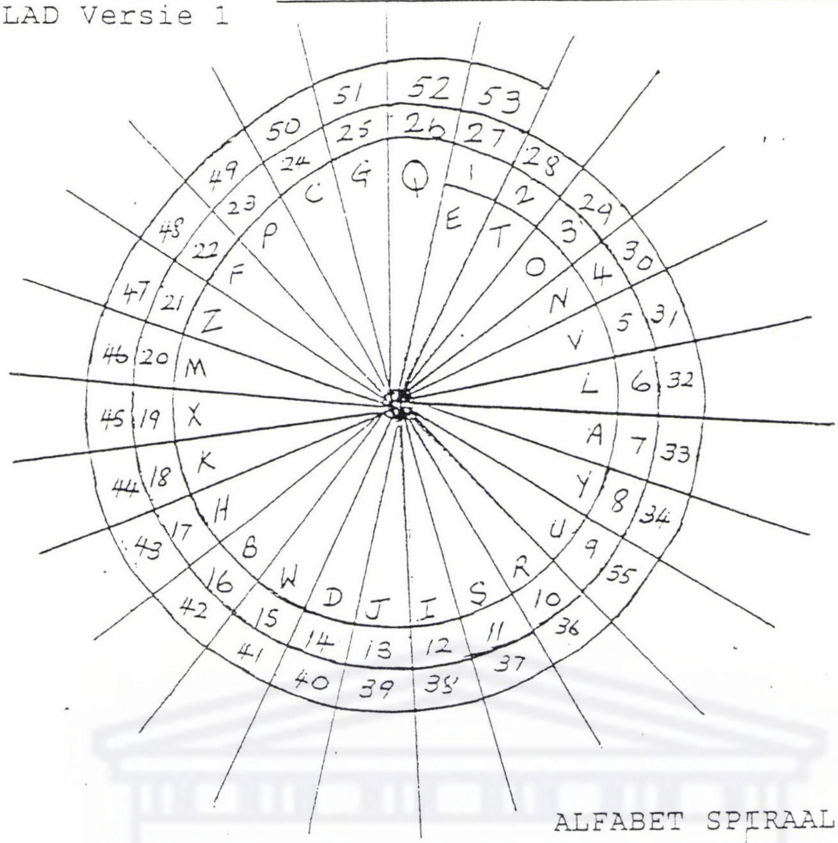
WY | VNAA
17 8 | 5 10 7 7

NX

BG | MW | ZD

BG MW ZD

BYLAE I: WERKBLAD Versie 1



ALFABET SPIRAAL

Die woord DRUIP sal die syferkode 14 10 9 12 23 hê. Daar word 'n spasie tussen opeenvolgende syferwaardes gelaat.

Geheime boodskappe word geskryf deur van die ALFABET SPIRAAL gebruik te maak. Om geheimhouding te verseker word reëls neergelê vir die skryf van 'n boodskap in 'n geheime kode.

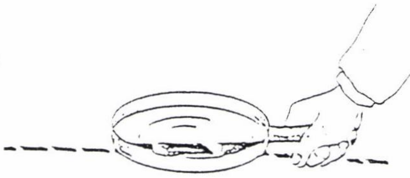
Paar die letters van die boodskap in pare van 2 af. As die boodskap uit 'n onewe aantal letters bestaan, word die laaste letter in die boodskap herhaal om dit ewe te maak. Elke paar letters van die boodskap word gebruik om 2 letters van die kodewoord te vorm. Die letters van die boodskap word met syferwaardes vervang en volgens 'n gegewe reël word nuwe syferwaardes verkry wat dan die letters in die kodewoord voorstel.

Die eerste letter van die kodewoord is volgens die volgende reël bepaal:

Eerste letter in kodewoord = 2maal(Eerste letter van eerste paar in boodskap) + Tweede letter van eerste paar in boodskap

BYLAE I: WERKBLAD Versie 1

LET WEL: ALLE BEREKENINGE MOET GEWYS WORD.

1. Boodskap		Kodewoord
JOHN		OBIZ

Maak gebruik van die eerste twee letters van die boodskap hierbo en gebruik die eerste reël om te toets of O die eerste letter van die kodewoord moet wees. Gebruik nou dieselfde twee letters om die reël vir die Tweede letter in die kodewoord te bepaal. Toets of die twee reëls ook lei na die letters I en Z in die kodewoord.

2. Gebruik die reëls in 1 om vas te stel of MXYPAI die kodeboodskap vir die boodskap EK SIT is.

3. Gebruik die reëls in 1 en bepaal die kodeboodskap vir:
DOEN DIE SOM

BYLAE I: WERKBLAD Versie 1

GEHEIME BOODSKAPPE Werkblad 2

1. Ontsyfer die kode wat volgens die reëls van Werkblad 1 saamgestel is:

Boodskap	Kode
??????	RATHJL

2. Vir die oefening wat volg bly die prosedure oor afparing en onewe aantal letters dieselfde. Ontsyfer die kode aan die hand van die volgende twee reëls:

Eerste letter in kode = 3maal(Eerste letter van eerste paar in boodskap) + 2maal(Tweede letter van eerste paar in boodskap)

Tweede letter in kode = Eerste letter van eerste paar in boodskap + 2maal(Tweede letter van eerste paar in boodskap)

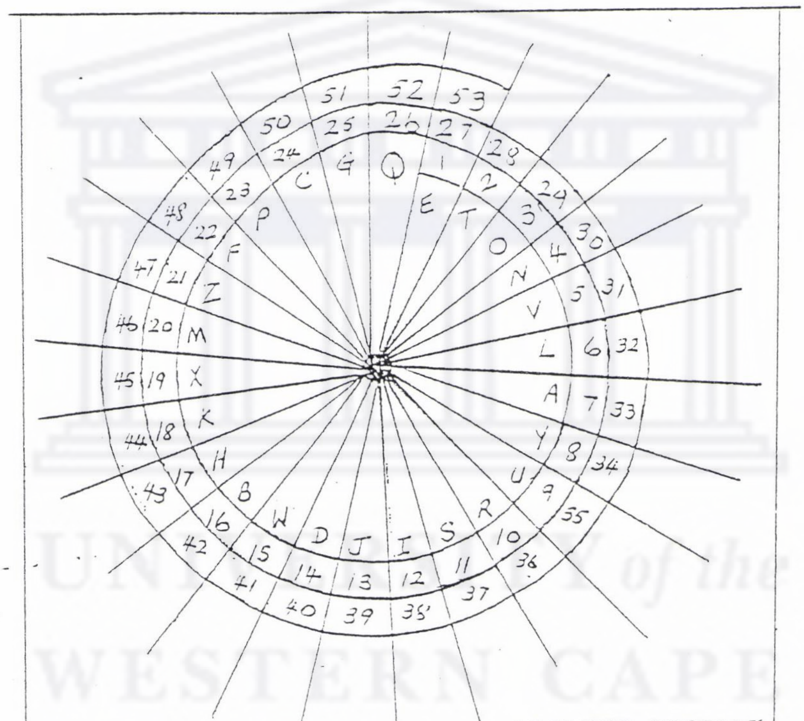
MYDLAV

BYLAE J: WERKBLAD Versie 2

GEHEIME BOODSKAPPE

Geheime boodskappe is oor die eeue heen gebruik. Julius Caesar, die Romeinse keiser het van kodes gebruik gemaak om boodskappe aan sy generaals op die slagveld te stuur. In die Tweede Wêreld Oorlog het die Amerikaners Japanse boodskappe onderskep en ontsyfer. Dit het hulle in staat gestel om die Japanse vloot te vernietig.

Syferwaardes word aan die letters van die alfabet toegeken. 'n Woord word omskep in syferwaardes. Met behulp van 'n reël word die syferwaardes verander in nuwe syferwaardes. Vir die nuwe syferwaarde word die ooreenstemmende letter neergeskryf. Dié letters vorm dan die kodewoord. Hieronder volg die letters van die alfabet en hul syferwaardes:



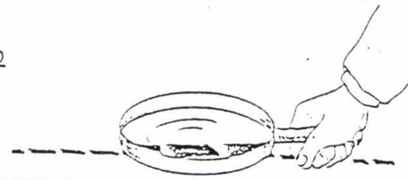
ALFABET SPIRAAL

Die woord DRUIP het die syferkode 14 10 9 12 23 . Daar word 'n spasie tussen opeenvolgende syfers gelaat. Met die reël Letter + 2, word 16 12 11 14 25 die nuwe syferkode. Die kodwoord vir DRUIP is BISDG.

BYLAE J: WERKBLAD Versie 2

In die probleme wat volg, word daar van twee letters in 'n woord gebruik gemaak en aan die hand van 'n reël word een letter van die kodewoord bepaal. Dieselfde twee letters in die woord word volgens 'n tweede reël gebruik om 'n tweede letter in die kodewoord te kry. Paar eers die letters van die boodskap in pare van 2 af. As die boodskap uit 'n onewe aantal letters bestaan, word die laaste letter herhaal om dit ewe te maak.

1. <u>Boodskap</u> <u>Kodewoord</u>

JOHN  OBIZ

Die eerste letter van die kodewoord is volgens die volgende reël bepaal:

Eerste letter in kode = 2maal (Eerste letter van 'n paar in boodskap) + Tweede letter van 'n paar in boodskap

1.1 Gebruik die eerste reël en verduidelik hoe J na O en H na I verander het.

1.2 O het verander na B en N na Z. Bepaal die reël wat die verandering moontlik gemaak het.

2. Gebruik die 2 reëls in 1 om vas te stel of MXYPLN die kodeboodskap vir die boodskap EK SIT is.

3. Gebruik die reëls in 1 en bepaal die kodeboodskap vir: DOEN DIE SOM

4. WS is die kodewoord vir 'n woord wat met die twee reëls afgelei is. Vind die woord.

5. Ontsyfer die kodeboodskap:
RATHJL

6. <u>Boodskap</u> <u>Kodeboodskap</u>

???????????????? RAJTNODQAVXFYAHD

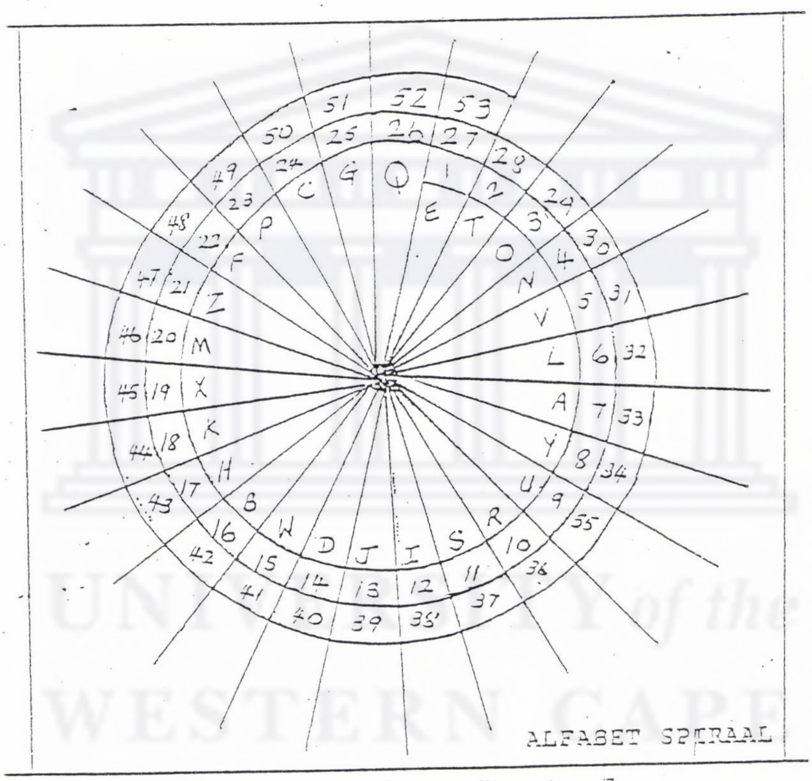
7. Vir die probleem bly die prosedure oor afparing en die onewe aantal letters dieselfde. Ontsyfer nou die kodeboodskap MYDLAV aan die hand van die volgende twee reëls:

Eerste letter in kode = 3maal(Eerste letter van 'n paar in boodskap) + 2maal(Tweede letter van 'n paar in boodskap)

Tweede letter in kode = Eerste letter van 'n paar in boodskap + 2maal(Tweede letter van 'n paar in boodskap)

Geheime boodskappe is oor die eeue heen gebruik. Julius Caesar, die Romeinse keiser, het van kodes gebruik gemaak om geheime boodskappe aan sy generaals op die slagveld te stuur. In die Tweede Wêreld Oorlog het die Amerikaners Japanse boodskappe onderskep en ontsyfer. Dit het hulle in staat gestel om die Japanse vloot te vernietig.

'n Eenvoudige manier om geheime boodskappe te skryf is om syferwaardes aan die letters van die alfabet toegeken. 'n Woord word omskep in syferwaardes. Met behulp van 'n reël word die syferwaardes verander in nuwe syferwaardes. Vir die nuwe syferwaarde word die ooreenstemmende letter neergeskryf. Die letters vorm dan die kodewoord. Hieronder volg die letters van die alfabet en syferwaardes wat aan hulle toegeken is:



Die woord **DRUIP** het die syferkode 14 10 9 12 23 . Daar word 'n spasie tussen opeenvolgende syfers gelaat. Met die reël Letter + 2, word 16 12 11 14 25 die nuwe syferkode. Die kodwoord vir **DRUIP** is **BISDG**.

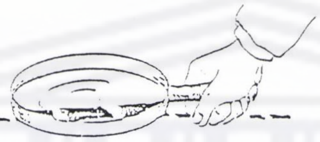
Om die ontsyfering van geheime boodskappe te bemoeilik, kan daar van twee letters gebruik gemaak word. 'n Kodewoord of kodeboodskap word as volg gekonstrueer as daar van twee letters gebruik gemaak word:

- Merk die letters in pare af. Indien die woord of boodskap uit 'n onewe aantal letters bestaan, word die laaste letter herhaal om 'n paar te vorm.
- Verander elke letter van die paar na 'n letter van die kodewoord of kodeboodskap. Hierdie verandering geskied deur twee reëls. Die eerste reël verander die eerste letter van 'n paar van boodskap of woord na die eerste letter van die kodewoord. 'n Tweede reël verander die tweede letter van die paar. Die reëls word dan herhaal vir die volgende paar letters. Hierdie proses word herhaal totdat al die letters van al die pare na nuwe letters verander is.

Hieronder volg boodskappe en hul kodes wat op hierdie manier verkry is.

1. Boodskap — Kodewoord

JOHN —— OBIZ



Die eerste letter van die kodewoord is volgens die volgende reël bepaal:

Eerste letter in kode = 2maal(Eerste letter van 'n paar in boodskap) + Tweede letter van 'n paar in boodskap

1.1 Gebruik die eerste reël en bevestig dat J in JOHN na O in OBIZ verander.
Toets ook of hierdie reël vir H in JOHN na I in OBIZ verander.

1.2 O in JOHN is verander na B in OBIZ. Bepaal hierdie reël.
Verander jou reël ook vir N in JOHN na Z in OBIZ?

2. Gebruik die twee reëls in 1 om vas te stel of MXYPLN die kodewoord vir die boodskap EK SIT is.

3. Gebruik die reëls in 1 en bepaal die kodeboodskap vir:
DOEN DIE SOM

4. WS is die kodewoord vir 'n woord wat met die twee reëls afgelei is.
Vind die woord.

5. Ontsyfer die kodeboodskap: RATHJL

6. Boodskap — Kodeboodskap

???????????????? — RAJTNODQAVXFYAHD

7. Vir die probleem bly die prosedure oor afparing en die onewe aantal letters dieselfde.
Ontsyfer nou die kodeboodskap MYDLAV aan die hand van van die volgende twee reëls:

Eerste letter in kode = 3maal(Eerste letter van 'n paar in boodskap) + 2maal Tweede letter van 'n paar in boodskap

Tweede letter in kode = Eerste letter van 'n paar in boodskap + 2maal (Tweede letter van 'n paar in boodskap)

BYLAE L

LESAANBIEDING

PLEK: Weltevrede Sekondêr

DATUM: 12 Junie 1996.

INLEIDING

Daar is vooraf met die leerders vergader om die werkswyse vir die tweede fase te bespreek en die banke te skuif vir die groepindeling. Aangesien die res van die skool eksamen geskryf het, het die leerders ook met die res van skool 'n pouse geneem. Die werksessie neem 'n aanvang na afloop van die pouse - dit val saam met die aanvang van die eksamen van die res van die skool.

Die eerste bladsy van die werkblad word uitgedeel en daar word aan die leerders genoem dat hulle deur die bladsy moet lees. Die doel van die bladsy was om leerders vertroud te maak met die werkswyse vir die probleme wat sou volg. Leerders moes deur die reël **Letter + 2** bevestiging kry dat **DRUIP** in **BISDG** verander.

Na afloop hiervan is die tweede bladsy van die werkblad, potlode,antwoordblaaie en uitveërs aan die leerders uitgehandig. Die leerders werk in groepe. Abdurahouf Cassiem en Cyril Julie tree as waarnemers op.

BYLAE M: ONDERWYSERSGIDS

TEIKENGROEP: Graad 8

MATERIAAL*:* Een stel werkblaaie wat aan elke leerder beskikbaar gestel word. Leerders word dan ook van die nodige skryfbehoeftes voorsien, byvoorbeeld potlode, uitveërs en antwoordblaaie.

DOELWITTE*:* Leerders kry die geleentheid om geheime boodskappe te ontsyfer deur gegewe algebraïese uitdrukkings te evalueer. Daar is geleentheid om reëls te bepaal vir oorspronklike- en geheime boodskappe. Veral belangrik is die dekodering van kodeboodskappe.

WERKSWYSE*:* Die nuwe ontwerpte werkblad word voorgelê aan die onderwyser van die klas betrokke in die fase vir kommentaar. Na afloop hiervan word daar weer met die onderwyser vergader vir 'n bespreking van die werkblaaie aan die hand van sy/haar oplossings en kommentaar. Sy/haar rol as fasiliteerder in die fase word nou verduidelik en hoe die klasrangskikking vir die aanbied van die fase sal geskied. Daar sal van hom/haar verwag word om te fokus op een groep en dan veldnotas te maak van besprekings wat in die groep plaasvind in die bepaling van hul oplossings. In die lesaanbieding word die eerste bladsy van die werkblad aan die leerders uitgedeel wat in groepe verdeel is. Hierdie bladsy van die werkblad gee 'n kort oorsig van geheime boodskappe, die gebruik van letters, syfers en reëls om boodskappe geheim te hou. Die tweede bladsy van die werkblad bevat probleme oor reëlbevestiging, afleiding van 'n reël, kodering en dekodering.

BYLAE N: OPLOSSINGS VIR WERKBLAD

L_{EK} - Eerste letter vir paar in kode

L_{TK} - Tweede letter vir paar in kode

L_{EB} - Eerste letter vir paar in boodskap

L_{TB} - Tweede letter vir paar in boodskap

1.1 JO/HN/

13 3/ 17 4/

J: 2x13 + 3 = 29 = O

H: 2x17 + 4 = 38 = I

1.2 O: B = 16 = 13 + 3

Reël: $L_{EB} + L_{TB}$

N: Z = 21 = 17 + 4

2. EK/SI/TT/

1 18/11 12/2 2/

L_{EK} = 2x1 + 18 = 20 = M

L_{TK} = 1 + 18 = 19 = X

L_{EK} = 2x11 + 12 = 34 = Y

L_{TK} = 11 + 12 = 23 = P

L_{EK} = 2x2 + 2 = 6 = L

L_{TK} = 2 + 2 = 4 = N

Kodewoord **MXYPLN**

3. DO/EN/DI/ES/OM/

14 3/1 4/14 12/1 11/3 20/

L_{EK} = 2x14 + 3 = 31 = V

L_{TK} = 14 + 3 = 17 = H

L_{EK} = 2x1 + 4 = 6 = L

BYLAE N: OPLOSSINGS VIR WERKBLAD

$L_{TK} = 1 + 4 = 5 = V$

$L_{EK} = 2x14 + 12 = 40 = D$

$L_{TK} = 14 + 12 = 26 = Q$

$L_{EK} = 2x1 + 11 = 13 = J$

$L_{TK} = 1 + 11 = 12 = I$

$L_{EK} = 2x3 + 20 = 26 = Q$

$L_{TK} = 3 + 20 = 23 = P$

Kodeboodskap: **VHLVDQJIQP**

4. WS

15 11

Reëls: $L_{EK} = 2L_{EB} + L_{TB}$

$L_{TK} = L_{EB} + L_{TB}$

$L_{EB} = L_{EK} - L_{TK}$

$L_{TB} = L_{TK} - L_{EB}$

/15 11/ $L_{EB} = 4 = N$ en $L_{TB} = 7 = A$

Woord: **NA**

5. RATHJL

10 7/2 17/13 6/

Reëls: $L_{EK} = 2L_{EB} + L_{TB}$

$L_{TK} = L_{EB} + L_{TB}$

$L_{EB} = L_{EK} - L_{TK}$

$L_{TB} = L_{TK} - L_{EB}$

BYLAE N: OPLOSSINGS VIR WERKBLAD

/10 7/ $L_{EB} = 3 = O$ en $L_{TB} = 4 = N$

/2 17/ $L_{EB} = 11 = S$ en $L_{TB} = 6 = L$

/13 6/ $L_{EB} = 7 = A$ en $L_{TB} = 25 = G$

Boodskap: **ONS LAG**

6. RA/JT/NO/DQ/AV/XF/YA/HD/

10 7/13 2/4 3/14 26/7 5/19 22/8 7/17 14/

Reëls: $L_{EK} = 2L_{EB} + L_{TB}$

$L_{TK} = L_{EB} + L_{TB}$

$L_{EB} = L_{EK} - L_{TK}$

$L_{TB} = L_{TK} - L_{EB}$

/10 7/ $L_{EB} = 3 = O$ en $L_{TB} = 4 = N$

/13 2/ $L_{EB} = 11 = S$ en $L_{TB} = 17 = H$

/4 3/ $L_{EB} = 1 = E$ en $L_{TB} = 2 = T$

/14 26/ $L_{EB} = 14 = D$ en $L_{TB} = 12 = I$

/7 5/ $L_{EB} = 2 = T$ en $L_{TB} = 3 = O$

/19 22/ $L_{EB} = 23 = P$ en $L_{TB} = 25 = G$

/8 7/ $L_{EB} = 1 = E$ en $L_{TB} = 6 = L$

/17 14/ $L_{EB} = 3 = O$ en $L_{TB} = 11 = S$

Boodskap: **ONS HET DIT OPGELOS**

BYLAE N: OPLOSSINGS VIR WERKBLAD

7. MYDLAV

20 8/14 6/7 5/

Reëls: $L_{EK} = 3L_{EB} + 2L_{TB}$

$L_{TK} = L_{EB} + 2L_{TB}$

$L_{EB} = ½(L_{EK} - L_{TK})$

$L_{TB} = ½(L_{TK} - L_{EB})$

/20 8/ $L_{EB} = 6$ = L en $L_{TB} = 1$ = E

/14 6/ $L_{EB} = 4$ = N en $L_{TB} = 1$ = E

/7 5/ $L_{EB} = 1$ = E en $L_{TB} = 2$ = T

Boodskap: **LEN EET**

OPLOSSINGSBLAD BYLAE O

PROBLEEM 1

1.1

J	O	H	N
13	3	17	4

1.1) 13x2=26+3=29=O

1.1) 17x2+4=38=I

1.2) 13+3=16 =B

17+4=21=Z

1.1 John → 13 3 174

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 2 \\ \hline 26 \\ +3 \\ \hline 29 \\ O \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times 2 \\ \hline 34 \\ +4 \\ \hline 38 \\ I \end{array}$$

1.2 B 16

13+3=16

Eerste letter en tweede letter geplus

17+4=21=Z

1.1

13	3	17	4
J	O	H	N

H = 17x2+4=38

1.1 13x2+3=29=O

1.2 13+3=16 16=B 17+4=21=Z

PROBLEME 2 en 3

3

Dr	ER	Di	eo	OM
14 3	1 4	14 12	1 11	3 20
31 17	6 5	40 26	13 12	26 23
V H	L V	D Q	J I	Q P

VHLVDQJIQP

2

EK	SI	TT
1 18	11 12	2 2
	34 23	6 4
20 19	Y P	L N
M X		

MXYPLN

Bylae O

Probleem 4

WS

W →

S →

$\underline{N} \rightarrow 2(4) + \underline{7} = \underline{15} \rightarrow W$

$\underline{A} \rightarrow (\underline{4}) + \underline{7} = \underline{11} \rightarrow S$

eerste letter = 4 → N

tweede letter = 7 → A

4

$$\begin{array}{r} 31 \\ -17 \\ \hline 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ -14 \\ \hline 3 \end{array}$$

W S

15 11

14 3

14 3

31 17

$$\begin{array}{r} 15 \\ -11 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ -4 \\ \hline 7 \end{array}$$

N A

NA

4) WS

15 11

14 3

31 17

$$\begin{array}{r} 31 \\ -17 \\ \hline 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ -14 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 11 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ -4 \\ \hline 7 \end{array}$$

NA

Bylae O

Probleem 5

5) RA|TH|JL|
10 7 2 17 13 6

10	7	2	17	13	6
-7	3	17	-15	6	-7
3	4	-15	32	7	-1

ONSLAG ONS lag

(5)

R	A	T	H	J	L
10	7	2	17	13	6
10	7	28	17	13	32
-7	-3	17	-11	-6	-7
3	4	11	6	7	25
O	N	S	L	A	G

~~ONSLAG~~ ons Lag

R 2(3) + 4 = 10 → O
A (3) + 4 = 7 → N
T 2(11) + 6 = 28 → S
H (11) + 6 = 17 → L
J 2(7) + 25 = 13 39 → A
L (7) + 25 = 6 = 32 G

Bylae O

Probleem 6

(6)

RA		JT		NO		DQ		AV		XF		YA		HD	
10	7	13	2	4	3	14	26	7	5	19	22	8	7	17	14
10	7	13	28	4	3	40	26	7	5	45	48	8	7	17	14
-7	-3	-2	-11	-3	1	26	14	-5	-2	-22	-23	-7	-1	-14	-3
3	4	11	17	1	2	14	12	2	3	23	25	1	6	3	11
O	N	S	H	E	T	D	I	T	O	P	G	E	L	O	S

ONSHETDITOPGELOS

Ons het dit opgelos

6 RA | JT | NO | DQ | AV | XF | YA | HD

10 7 | 13 2 | 4 3 | 14 26 | 7 5 | 19 22 | 8 7 | 17 14

ONSHETDITOPGELOS

R 2(3) + 4 = 10 → O

A (3) + 4 = 7 → N

J 2(11) + 17 = 13 = 39 → S

T (11) + 17 = 2 = 28 → H

N 2(1) + 2 = 4 = → E

O (1) + 2 = 3 = → T

D 2(14) + 12 = 14 = 40 → D

Q (14) + 12 = 26 → I

A 2(2) + 3 = 7 → T

V (2) + 3 = 5 → O

X 2(23) + 25 = 19 = 45 P

E (23) + 25 = 22 = 48 G

Y 2(1) + 6 = 8 → E

A (1) + 6 = 7 → L

H 2(3) + 11 = 17 → O

D (3) + 11 = 14 → S

Bylae O

Probleem 7

M 3 (6) + 2(1) = 20 → L

Y (6) + 2(1) = 8 = → E

D 3 (4) + 2(1) = 14 → N

L (4) + 2(1) = 6 → E

A 3(1) + 2 (2) = 7 → E

V (1) + 2 (2) = 5 → T

2 van die eerste letter = 12	8	2
1 van die eerste letter = 6	4	1
2 van die tweede letter = 2	2	4
1 van die tweede letter = 1	1	2

7

14 1 4 EN

11 9 1 4

11 − 9 = 2; 2 ÷ 2 = 1 3 + 8 = 11

9 − 1 = 8 S 1+8 = 9

8 ÷ 2 = 4 7

M	Y	D	L	A	V
20	8	14	6	7	5
20 − 8 = 12	8 − 6 = 2	14 − 6 = 8	6 − 4 = 2	7 − 5 = 2	5 − 1 = 4
12 ÷ 2 = 6	2 ÷ 2 = 1	8 ÷ 2 = 4	2 ÷ 2 = 1	2 ÷ 2 = 1	4 ÷ 2 = 2
6	1	4	1	1	2
L	E	N	E	E	T

BYLAE P

12/06/1996 Weltevrede Senior Sekondêr

FASE II — Geheime ~~Bood~~skappe
St 6.

Bladsy 1 ~~is~~ aan uitgedeel met opdrag dat leerlinge dit moet deurlees en die kontroles te skep. Leerlinge het individueel deurgelees. Leerlinge in groep C het begin kontroleer of DRUIP wel die sifferkode 14 10 9 12 23 is.

BYLAE P

Leerling 4 in groep C begin vriende se name neer te skryf en dan die syferkode vir die name te skryf. Alhoewel die syferkode vir BISDG gekontroleer word, is daar nie sprake van konsentrasie op die reël nie. ~~[illegible]~~ (* Vir attensie volgende fase/werkblad)

XW verduidelik die belangrikheid van die reël en hardy die 2de bladsy uit.

Miskien moet hier gedink word dat die onderwyser die konteks moet verduidelik sodat leerlinge die idee van kodering snap.

Leerlinge het bladsy 2 begin lees. Leerling 1 in groep het met oppening begin en die volgende skema opgestel

J	O
13	3
H	N
17	4

Leerlinge weier om eerste reël (letter + 2) te gebruik (?. Moet eenvoudige reël in konteksskepping en probleme gegee word? Moet daar meer eksplisiteit wees

BYLAE P

aangaande uitleg van werkblad.]
Leerlinge moes verduidelik wat
wat die prosedure vir kodewoordskepping ~~was~~

* Na die die verduidelikings het ~~die~~
die leerlinge weggespring
(Lees leerlinge?) ~~Hulle~~

In groep D was leerlinge
bekommerd oor wat hulle moet
doen. Hulle ~~het~~ gedurig na die
reël verwys en wou weet
wat hulle met die reël moet
doen. (Hulle soek 'n verduideliking
vir die "doen dit")
Groep D ~~wat~~ wou ook 2de
letter van JOHN met

BYLAE P

dieselfde reël verander.

Daar moes aan Groep C verduidelik word, wat die opdrag van 1.2 was. (Het leerlinge probleme om die opdragte te begryp? Is ons as onderwysers te besorgd dat leerlinge nie sal werk nie?)

Groep D vasstel ~~nog~~ om 2de reël te bepaal. Daar

- Werkblad se geskiktheid vir enkel periodes van 45-55 minute
  ~~Of~~ Opsplitsing van werkblad in 3-4 kort blaaie

A { A: Inleiding
  { B: Reëlbevestiging + formulering

Bevestiging 1 2 & 3
(Huiswerk) B { Kodering
  { *Leerlinge ontwikkel kodeboodskap met eie reëls, WOORD BOODSKAP
  { *Verdere ~~Kodering~~ Bevestiging
C { Dekodering 4 & 5 & 6
(Huiswerk) { Tuiswerk dekodeer